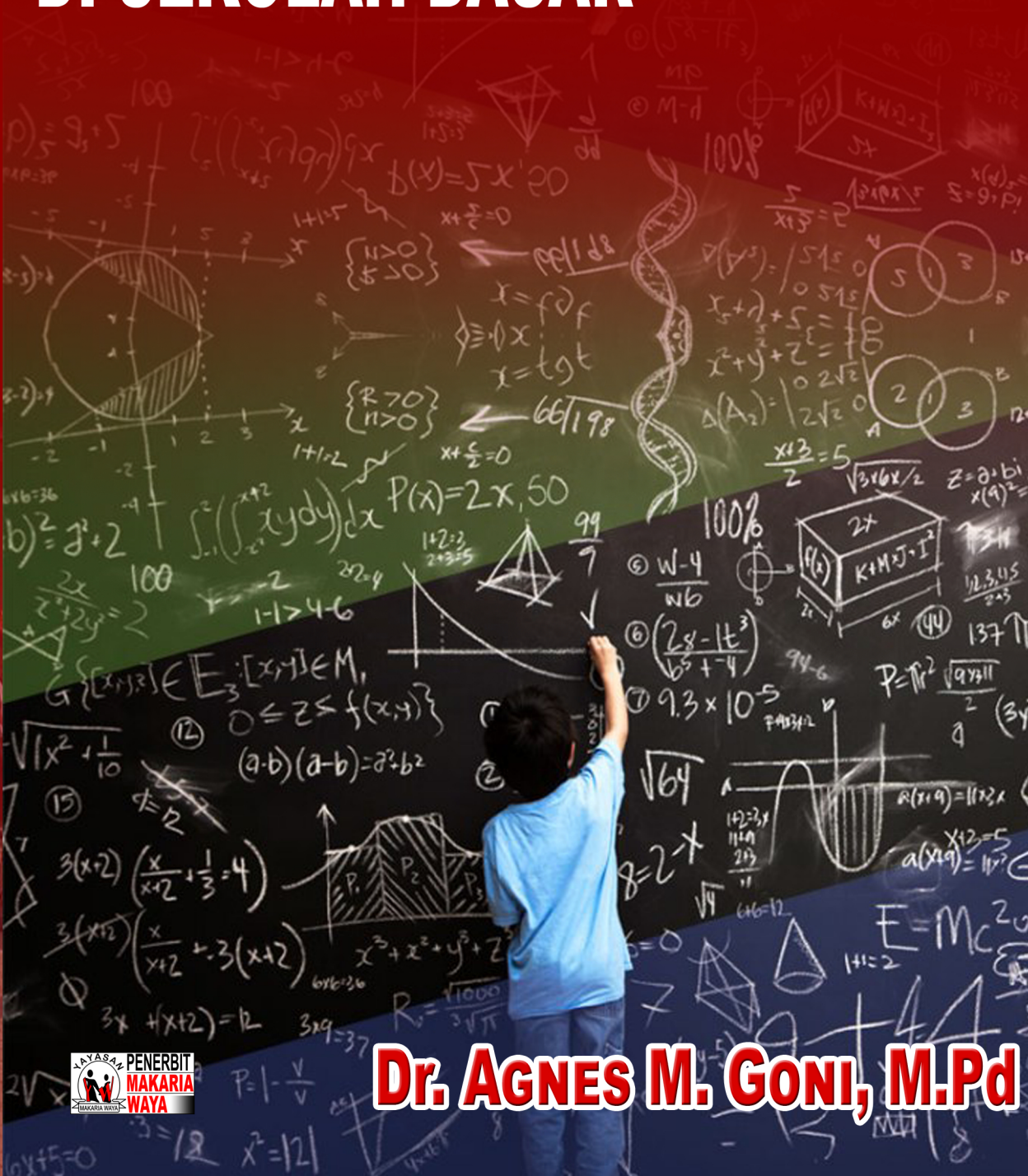


# PENILAIAN AUTENTIK PEMBELAJARAN MATEMATIKA DI SEKOLAH DASAR



PENILAIAN AUTENTIK  
PEMBELAJARAN MATEMATIKA  
DI SEKOLAH DASAR

Kutipan Pasal 72:

Ketentuan Pidana Undang-Undang

Republik Indonesia Nomor 19 Tahun 2002 tentang Hak Cipta

1. Barangsiapa dengan sengaja dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 2 ayat (1) atau Pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling singkat 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp. 1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp. 5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).
2. Barangsiapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran Hak Cipta atau Hak Terkait sebagaimana dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp. 500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

**PENILAIAN AUTENTIK  
PEMBELAJARAN MATEMATIKA  
DI SEKOLAH DASAR**

**Dr. Agnes M. Goni, M.Pd**



**Penerbit: Yayasan Makaria Waya**

Jl. A. Mononutu - Minahasa Utara, Kode Pos 95372

Tel/Fax (0431) 892162, Hp 081334333215

Email: [miekemandagi@gmail.com](mailto:miekemandagi@gmail.com)

**Goni, Agnes M.**

Penilaian Auntenik Pembelajaran Matematika di Sekolah Dasar –  
Oleh Agnes M. Goni, Cet. I, - Manado, Yayasan Makaria Waya, 2016

x, 214 hlm; 23 cm

**ISBN:** 978-602-60435-6-6

• **Penilaian Auntenik Pembelajaran Matematika di Sekolah Dasar**

**Dr. Agnes M. Goni, M.Pd**

- **Editor** : Mieke O. Mandagi
- **Penyunting** : A. Archenta Tumengkol
- **Lay-out** : A. Archenta Tumengkol
- **Cover** : DEREYEZ Printing

- 
- Hak cipta yang dilindungi
  - Undang-undang pada : Pengarang
  - Hak Penerbitan pada : Yayasan Makaria Waya
  - Dicetak oleh : DEREYEZ Printing

- 
- Diterbitkan oleh:  
**Yayasan Makaria Waya**  
Jl. A. Mononutu - Minahasa Utara 95372  
Tel/Fax (0431) 892162, Hp 081334333215  
Email: miekemandagi@gmail.com

- 
- Cetakan I : 2016
-

# KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Tuhan yang mahakuasa karena atas Rahmat dan Berkatnya, sehingga penulis dapat menyelesaikan buku ini. Buku ini dimaksudkan untuk menjadi bahan acuan bagi calon guru dan bagi guru sekolah dasar dalam membelajarkan matematika khususnya bilangan di sekolah dasar, juga sebagai bahan bacaan bagi pelaku pendidikan untuk menambah wawasan pengetahuan tentang pembelajaran matematika di sekolah dasar.

Penulisan buku ini juga membahas tentang penilaian autentik pembelajaran matematika, yang dapat memberikan wawasan bagi mahasiswa calon guru dan guru Sekolah Dasar tentang menyusun tes, assesmen dan penilaian.

Dalam penulisan buku ini penulis sangat berterima kasih kepada pihak-pihak yang telah mendukung penulisan buku ini.

Akhirnya penulis mengharapkan sumbang dan saran dari berbagai pihak demi perbaikan dan penyempurnaan buku ini.

Penulis

Agnes Maria Goni



# DAFTAR ISI

<b>Kata Pengantar .....</b>	<b>v</b>
<b>Daftar Isi .....</b>	<b>vii</b>
<b>BAB I. PENILAIAN PEMBELAJARAN MATEMATIKA .....</b>	<b>1</b>
A. Pengertian Penilaian Pembelajaran Matematika di SD....	1
B. Jenis Penilaian Pembelajaran Matematika .....	4
Daftar Pustaka .....	10
<b>BAB II. BILANGAN DAN LAMBANG BILANGAN .....</b>	<b>11</b>
A. Sejarah, Konsep, dan Lambang Bilangan.....	12
B. Sistem Numerasi .....	
C. Membilang .....	15
D. Nilai Tempat .....	18
E. Pengajaran Bilangan dan Lambangnya di Kelas 1 – 3 .....	21
F. Pengajaran Bilangan dan Lambangnya di Kelas 4 – 6 .....	25
Daftar Pustaka .....	28
<b>BAB III. BILANGAN CACAH .....</b>	<b>29</b>
A. Konsep Bilangan Cacah .....	30
B. Operasi pada Bilangan Cacah .....	30
C. Pengajaran Operasi pada Bilangan Cacah di Kelas 1 – 3 ..	33
D. Pengajaran Penjumlahan di Kelas 4 – 6 .....	42
E. Pengajaran Pengurangan di Kelas 1 – 3 .....	46
F. Pengajaran Pengurangan di Kelas 4 – 6 .....	53
G. Pengajaran Perkalian di Kelas 1 – 3 .....	54
H. Pengajaran Perkalian di Kelas 4 – 6 .....	59
I. Pengajaran Pembagian di Kelas 1 – 3 .....	64
Daftar Pustaka .....	69



<b>BAB IV. PECAHAN DAN PERBANDINGAN .....</b>	<b>71</b>
A. Pengertian Pecahan .....	71
B. Pecahan yang Ekuivalen .....	72
C. Pecahan Paling Sederhana .....	72
D. Pecahan Senama .....	73
E. Pecahan Campuran .....	73
F. Penjumlahan, Pengurangan, Perkalian, dan Pembagian Pecahan .....	74
G. Pecahan Desimal .....	76
H. Persen .....	77
Daftar Pustaka .....	79
 <b>BAB V. BILANGAN BULAT .....</b>	 <b>81</b>
A. Pengertian Bilangan Bulat .....	82
B. Operasi pada Bilangan Bulat .....	86
C. Pengajaran Bilangan Bulat .....	90
D. Bilangan Bulat dan Operasinya .....	96
Tugas dan Latihan .....	106
Daftar Pustaka .....	108
 <b>BAB VI. TEORI BILANGAN .....</b>	 <b>109</b>
A. Keterbagian .....	110
B. Faktor Persekutuan Terbesar .....	119
C. Kelipatan Persekutuan Terkecil .....	130
D. Keprimaan .....	134
E. Kongruensi .....	147
F. Pengajaran FPB dan KPK di Sekolah Dasar .....	161
Daftar Pustaka .....	174
 <b>BAB VII. BANGUN-BANGUN RUANG .....</b>	 <b>175</b>
A. Bidang Banyak .....	176
B. Bangun Tiga Dimensi yang Berpermukaan Lengkung ...	184
C. Pengajaran Bidang Banyak Kelas-kelas Rendah SD .....	186

D. Pengajaran Bangun Tiga Dimensi yang Berpermukaan Lengkung .....	186
E. Pembelajaran Bidang-bidang Banyak di Kelas 4-6 .....	187
F. Pengajaran Bangun Tiga Dimensi di Kelas 4-6 .....	194
Daftar Pustaka .....	214



# BAB I

## **PENILAIAN PEMBELAJARAN MATEMATIKA**

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa dapat:

1. Membedakan penilaian, asesmen, tes, dan pengukuran;
2. Melaksanakan penilaian kesiapan siswa dalam pembelajaran matematika di SD;
3. Melaksanakan penilaian tugas dalam pembelajaran matematika di SD;
4. Melaksanakan penilaian kemampuan matematika dalam pembelajaran matematika di SD;
5. Melaksanakan penilaian dengan observasi dalam pembelajaran matematika di SD;
6. Melaksanakan penilaian dengan wawancara dalam pembelajaran matematika di SD;
7. Melaksanakan penilaian dengan tes diagnostik dalam pembelajaran matematika di SD;
8. Melaksanakan penilaian dengan menggunakan portofolio dalam pembelajaran matematika di SD; dan
9. Melaksanakan penilaian dengan menggunakan jurnal dalam pembelajaran matematika di SD;

## A. PENGERTIAN PENILAIAN PEMBELAJARAN MATEMATIKA DI SD

Penilaian pembelajaran matematika baik pada jenjang SD maupun pada jenjang yang lebih tinggi umumnya ditekankan kepada hasil pembelajaran. Penilaian ini didasarkan pada hasil tes yang dilaksanakan oleh guru. Tes ini pada umumnya dirancang oleh guru untuk memperoleh informasi tentang materi matematika yang tidak diketahui oleh siswa. Penilaian selama proses pembelajaran tampaknya belum banyak dilaksanakan oleh para guru. Guru belum banyak memperhatikan bagaimana perhatian, pengetahuan dan pikiran siswa selama proses pembelajaran matematika berlangsung. Guru belum banyak meminta para siswa untuk mendemonstrasikan apa yang siswa ketahui dan bagaimana cara siswa berpikir tentang konsep matematika yang sedang diperlukan proses pembelajaran. Padahal masalah ini sangat penting untuk diamati dan diketahui oleh setiap guru yang mengajar matematika di SD, karena dengan mengetahui cara berpikir dan apa yang diketahui siswa, guru dapat memutuskan langkah atau kegiatan apa yang akan dilakukan selanjutnya.

Berikut akan diuraikan secara singkat beberapa hal tentang tes, pengukuran, asesman, dan penilaian atau evaluasi, terutama dalam kaitannya dengan pembelajaran matematika.

### 1. Tes

*Tes ialah suatu prosedur yang sistematis untuk mengamati dan mengukur perilaku seseorang.* Dalam hal ini ungkapan “prosedur yang sistematis” menunjukkan bahwa pengadaan suatu tes mengikuti tahap-tahap tertentu. Tahap-tahap yang dimaksud antara lain adalah pengkonstruksian, pelaksanaan atau pengadministrasian, penyekoran, dan pendeskripsikan hasil. Istilah “perilaku” maksudnya adalah suatu tes mengukur karakteristik seseorang berdasarkan jawaban-jawaban dia terhadap soal-soal atau pertanyaan-pertanyaan yang terdapat pada tes tersebut. Kita tidak mengamati dan mengukur suatu sampel soal dari semua soal yang mungkin. Hasil suatu tes yang biasanya berupa skor dapat dideskripsikan dengan menggunakan pengukuran.

## 2. Pengukuran

Secara umum, pengukuran adalah penunjukan bilangan terhadap suatu objek atau kejadian berdasarkan aturan tertentu. Segala sesuatu contoh ialah kegiatan menentukan panjang dan lebar suatu meja dengan menggunakan penggaris sebagai satuan atau sentimeter sebagai satuan. Dalam kaitannya dengan penilaian, pengukuran dapat didefinisikan sebagai berikut. *Pengukuran ialah suatu prosedur untuk menunjukkan bilangan bagi atribut atau karakteristik seseorang berdasarkan aturan tertentu. Bilangan hasil pengukuran ini biasanya disebut dengan skor.* Sebagai contoh, setelah kita mengadakan tes, kita memeriksa jawaban siswa dengan menggunakan pedoman penyekoran yang telah disediakan. Siswa memperoleh skor tertentu untuk setiap soal. Jumlah skor siswa untuk seluruh soal dalam tes menyatakan skor siswa terhadap tes tersebut.

## 3. Asesmen

*Asesmen merupakan suatu kegiatan pengumpulan informasi yang sistematis tanpa adanya pembuatan keputusan tentang nilai.* Informasi ini dapat bersifat kualitatif atau kuantitatif. Asesmen dapat dilakukan dengan menggunakan tes atau bukan tes. Dalam kaitannya dengan asesmen yang menggunakan bukan tes, salah satu ilustrasinya adalah sebagai berikut. Selama pembelajaran berlangsung, guru berinteraksi dengan siswanya. Dalam interaksi ini, guru secara terus menerus mencoba memahami apa yang dapat dilakukan oleh siswa berkaitan dengan tugas atau konsep yang disajikan oleh guru. Guru juga berusaha memahami bagaimana siswa dapat melakukan tugasnya tadi, dan guru menggunakan informasi ini untuk mengarahkan pembelajaran yang dilaksanakannya. Oleh sebab itu, asesmen merupakan kegiatan yang menyatu dengan pembelajaran. Untuk memperoleh informasi dengan cara ini, guru tidak cukup hanya menggunakan tes. Guru membutuhkan teknik lain, misalnya wawancara, observasi, atau teknik lain yang sesuai dengan tujuan pembelajaran.

#### 4. Penilaian atau Evaluasi

*Penilaian ialah suatu proses pembuatan keputusan berdasarkan kesesuaian seseorang, program, proses atau hasil dengan tujuan tertentu.* Hasil keputusan ini berupa nilai dan bersifat kualitatif. Keputusan sebagai hasil evaluasi dapat ditetapkan berdasarkan hasil tes, pengukuran atau asesmen. Sebagai contoh, setelah mengikuti tiga kali tes dan berdasarkan hasil tiap tes yang berupa skor, guru memutuskan siswa yang bernama TOAR adalah “istimewa” atau nilai “10”, WULAN mendapat nilai “9”, Tia mendapat nilai “8”, dan Hendrik mendapat nilai “6” untuk mata pelajaran matematika yang tercantum di rapor.

### B. JENIS PENILAIAN PEMBELAJARAN MATEMATIKA

Penilaian pada awal pembelajaran terdiri atas *penilaian kesiapan* dan *penilaian penempatan*. Penilaian kesiapan adalah penilaian yang menjajagi sejauh mana para siswa memiliki pengetahuan dan keterampilan yang dibutuhkan untuk memulai pembelajaran. Penilaian penempatan adalah penilaian yang menjajagi sejauh mana para siswa telah mencapai tujuan belajar yang diinginkan pada pembelajaran yang direncanakan.

Penilaian selama proses pembelajaran terdiri atas *penilaian formatif* dan *penilaian diagnostik*. Penilaian formatif adalah penilaian yang menjajagi sejauh mana para siswa telah memperoleh kemajuan dalam belajar dan para siswa membutuhkan bantuan dalam belajar. Penilaian diagnostik adalah penilaian yang menjajagi penyebab kesulitan belajar para siswa. Sebagai tindak lanjut penilaian diagnostik adalah pengajaran perbaikan.

Penilaian pada akhir pembelajaran disebut *penilaian sumatif*. Penilaian sumatif adalah penilaian yang menjajagi para siswa yang telah tuntas mempelajari pengetahuan dan keterampilan yang terkait dengan materi pelajaran yang mereka ikuti. Penilaian berfungsi menentukan nilai bagi setiap siswa pada pelajaran yang mereka ikuti.

## 1. Penilaian Kesiapan Siswa dalam Belajar Matematika di SD

Apabila guru ingin mengajarkan suatu konsep matematika kepada para siswanya guru perlu memperhatikan siap atau tidaknya para siswa untuk menerima pelajaran. Setiap siswa sebaiknya telah memiliki kesiapan mental maupun fisik untuk menerima pelajaran agar konsep matematika yang akan diajarkan dapat dipelajari dengan lancar oleh para siswa. Kesiapan siswa yang perlu mendapatkan perhatian guru terutama yang berkenaan dengan materi atau isi pelajaran. Misalkan guru akan mengajarkan operasi penambahan dua bilangan asli kurang dari 10 dengan menggunakan benda konkret berupa kancing baju, seperti penambahan 5 dan 3 atau  $5 + 3$ . Setiap siswa harus sudah memiliki kesiapan materi prasyarat, yaitu pengetahuan dan keterampilan matematik yang terkait dengan tujuan kesiapan materi yang terkait dengan tujuan pembelajaran tersebut. Kesiapan pengetahuan dan keterampilan matematik yang harus dimiliki setiap siswa misalnya adalah mengambil 5 kancing baju sebagai kelompok pertama dan 3 kancing baju sebagai kelompok kedua. Berikutnya, setiap kelompok kancing baju tadi. Terakhir, setiap siswa harus memiliki pengetahuan dan keterampilan untuk “membilang” banyaknya baju yang terdapat pada gabungan tadi.

## 2. Penilaian Tugas

Salah satu kegiatan guru matematika di SD adalah memilihkan dan memberikan tugas kepada para siswa. Tugas tersebut dapat berupa *pertanyaan, masalah, latihan soal, karangan*, atau bentuk lainnya. Tugas tersebut dapat diselesaikan secara tertulis, perorangan atau kelompok oleh para siswa. Tugas ini biasanya dikerjakan oleh siswa pada buku tulis khusus agar terdokumentasikan dengan baik. Masing-masing tugas dalam dokumen ini kelak dikoreksi dan dibubuhi skor atau komentar tertulis oleh guru, sehingga dokumen ini dapat dijadikan oleh guru sebagai salah satu bahan untuk memantau perkembangan atau kemajuan belajar siswa.



### **3. Penilaian Kemampuan Matematika dalam Belajar Matematika di SD**

Untuk memperoleh data tentang kemampuan matematika para siswa, salah satu metode yang dapat digunakan adalah tes. Tes ini biasanya dirancang dan disusun oleh guru sehingga disebut tes buatan guru. Pertanyaan tes ada bermacam-macam, misalnya pertanyaan benar salah, jawaban singkat, melengkapi, pilihan ganda, menjodohkan, terbuka tertutup, dan uraian.

### **4. Observasi**

Selama proses pembelajaran berlangsung, banyak informasi tentang siswa yang dapat diamati dan dikumpulkan oleh guru. Informasi yang terkait dengan para siswa ini antara lain adalah motivasi, perhatian, rasa ingin tahu, ketabahan, semangat, keaktifan, kerja sama, keterampilan menggunakan alat bantu belajar, dan pemahaman atau kecakapan mereka selama proses pembelajaran matematika yang sedang berlangsung. Informasi yang demikian ini sangat sulit dikumpulkan dengan menggunakan metode atau teknik penilaian khusus.

Salah satu di antaranya adalah metode observasi atau pengamatan. Pengamatan ini dapat dilakukan secara tidak formal atau tidak terstruktur. Contoh, misalkan pada saat guru menjelaskan suatu konsep matematika, dengan pengamatan selintas guru mengetahui persis bahwa Toar dan Noni atau dalam buku catatan khusus kejadian tersebut dan mengingatkan kepada siswa agar tidak melakukan dan tidak mengulangi hal seperti itu karena akan merugikan mereka maupun teman lainnya dalam kelas. Adanya peringatan guru tersebut diharapkan agar kedua siswa ini menyadari bahwa perbuatan mereka itu kurang baik dan mereka tidak akan mengulanginya.

Kemudian guru mengamati dari dekat para siswanya yang sedang mengerjakan tugas tersebut. Dengan pengamatannya guru akan mengetahui, misalnya, siapa yang cepat menemukan paling sedikit dua cara, siapa yang dapat membantu temannya, siapa yang terlibat aktif menyelesaikan tugas, siapa yang dapat bekerja sama dengan temannya,

siapa dapat menjelaskan idenya dengan baik, dan siapa yang membutuhkan bantuan.

## 5. Wawancara

Wawancara biasanya dilakukan secara langsung dan “berhadapan” antar wawancara dengan yang diwawancarai. Biasanya pewawancara mengajukan pertanyaan lisan kepada yang diwawancarai. Metode ini digunakan karena teknik pengumpulan data atau informasi yang menggunakan tes buatan guru kurang mampu mengungkap secara tuntas pengetahuan konseptual dan penalaran siswa.

Sebagai contoh, seorang siswa menjawab pertanyaan tes penjumlahan bersusun sebagai berikut:

$$\begin{array}{r} 27 \\ + 14 \\ \hline 31 \end{array}$$

Dengan tes bantuan guru dan jawaban siswa seperti ini, guru tidak dapat mengetahui mengapa siswa melakukan kesalahan seperti. Dengan wawancara, sumber atau penyebab kesalahan tersebut dapat terungkap.

Guru (G) dapat mewawancarai siswa (S) antara lain sebagai berikut:

G : Jelaskan kepada Bapak mengapa  $27 + 14 = 31$

S : karena  $7 + 4 = 11$  dan  $2 + 1 = 3$ . Jadi  $27 + 14 = 31$

G : kamu tahu bahwa 27 artinya  $20 + 7$  dan 14 artinya  $10 + 4$   
Sekarang berapa  $7 + 4$  dan  $20 + 10$  ?

S : Apa artinya 11 ?

G : Sekarang kita menyusun kembali dan menjawab soal tadi sebagai berikut :

$$27 = 20 + 7$$

$$\underline{14} = 10 + 4 +$$

$$= 30 + 11 = 30 + (10 + 1) = (30 + 10) + 1 = 40 + 1 = 41$$

Sekarang apakah kamu mengetahui letak kesalahan?

S : Ya, Pak.

## 6. Tes Diagnostik dalam Belajar Matematika di SD

Tes buatan guru juga merupakan suatu metode yang dapat digunakan untuk mendiagnosis letak kesulitan belajar siswa. Tes yang dirancang secara khusus untuk mendiagnosis letak kesulitan belajar siswa disebut tes diagnostik. Untuk merancang dan melaksanakan tes diagnostik guru perlu memperhatikan sekurang kurangnya tiga hal, yaitu:

- a. Menentukan tujuan dan topik
- b. Memilih dan menetapkan jenis pertanyaan yang sesuai dengan tujuan, dan
- c. Menganalisis jawaban yang di kemukakan siswa dan hasil tes baik perorangan maupun klasikal.

## 7. Penilaian dengan Portofolio

Portofolio juga merupakan suatu metode penilaian yang dapat digunakan oleh guru. Portofolio adalah suatu kumpulan hasil karya masing-masing siswa yang didokumentasikan secara teratur dan baik. Portofolio antara lain memuat tugas-tugas yang dikerjakan siswa, jawaban siswa atas pertanyaan yang diajukan guru, catatan tentang hasil wawancara yang pernah dilakukan kepada siswa, dan karangan atau jurnal yang disusun oleh siswa. Isi portofolio ini biasanya merupakan karya yang sangat penting dan utama serta “disepakati” oleh siswa dan guru.

## 8. Penilaian dengan Jurnal

Jurnal merupakan salah satu bentuk atau komentar yang disusun siswa tentang kegiatan yang dilakukannya. Kegiatan yang dimaksud dapat merupakan bagian dari kegiatan harian siswa selama mengikuti pelajaran matematika. Salah satu komentar siswa adalah “Saya senang mempelajari matematika karena matematika merupakan mata pelajaran yang membuat saya dapat berpikir kritis dan logis. Matematika memuat pola-pola yang indah dan mengagumkan serta menuntut saya untuk terus mempelajarinya. Di samping itu matematika sangat banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari”.

Contoh lain adalah “Setiap saya mengikuti pelajaran matematika, saya selalu merasa takut karena saya tidak bisa memahami materi yang diajarkan guru.

## TUGAS DAN LATIHAN

1. Jelaskan:
  - a. Perbedaan tes dan pengukuran
  - b. Perbedaan tes dan asesmen
  - c. Perbedaan asesmen dan penilaian
2. Wawancarailah guru yang mengajar matematika di SD tentang:
  - a. Jenis tes yang sering digunakan di sekolahnya atau SD lain
  - b. Jenis pertanyaan yang banyak digunakan dalam setiap tes
  - c. Berapa kali guru melaksanakan tes diagnostik dalam satu semester
  - d. Jenis tugas yang sering diberikan guru kepada siswanya
  - e. Ada atau tidaknya tugas menyusun jurnal dan portofolio
  - f. Berapa kali guru mewawancarai siswa dalam seminggu
  - g. Apakah guru sering mengobservasi kegiatan siswa selama pembelajaran

Laporkan dan diskusikan hasil wawancara tersebut di kelas saat jam kuliah tatap muka, yang disediakan oleh dosen untuk maksud itu.

## DAFTAR PUSTAKA

- D'Augustine, C. And Smith, W. C (jr). 1992. *Teaching Elementary School Mathematics*. New York, NY: HarperCollins
- Gronlund, N. E. 1982. *Constructing Achievement Test*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall,
- Kennedy, L. M. And Tipps, S. 1994. *Guiding Children's Learning of Mathematics*. Belmont, CA: Wadsworth
- Rakajoni, T. 1993. *Penilaian Hasil Belajar Melalui Pengalaman Dalam Program S1 ke dua Pendidikan Bidang Studi*. Jakarta: Konsorsium Ilmu Pendidikan, Dikjendikti Depdikbud.
- Sutawidjaja, A. Muhsetyo, G., Muchtar, A.K., 1991/1992. *Pendidikan Matematika2*. Jakarta: Depdikbud (Proyek Pengembangan PGSD).
- Sa'dijah Cholis. 1998/1999. *Pendidikan Matematika I*. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Proyek Pendidikan Guru Sekolah Dasar.
- Van De Walle, J. A. 1994. *Elementary School Mathematics: Teaching Developmentally*. New York, NY: Longman

## BAB II

# **BILANGAN DAN LAMBANG BILANGAN**

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa diharapkan dapat:

1. Mengetahui sejarah bilangan dan sistem numerasinya
2. Membedakan sistem numerasi dengan menggunakan nilai tempat dan tidak menggunakan nilai tempat
3. Membedakan angka (digit) dan bilangan
4. Mengetahui korespondensi 1-1 untuk membandingkan banyaknya anggota dua atau lebih himpunan.
5. Memahami makna membilang anggota suatu himpunan
6. Mengetahui cara mengajarkan bilangan dan lambang bilangan peserta didik di SD
7. Memilih cara yang sesuai untuk mengajarkan bilangan dengan sistem desimal.

## A. SEJARAH, KONSEP, DAN LAMBANG BILANGAN

Kapan lahirnya bilangan para ahli hanya bisa mengatakan bahwa bilangan itu ada sejak peradaban manusia pertama ada, didorong oleh keperluan bermasyarakat, yaitu menghitung dan membandingkan.

Setelah ditemukan bukti-bukti sejarah, peradaban manusia mulai dapat dicatat dan direkam, serta dipelajari makna dan lambang, gambar, benda, bangunan, dan peninggalan lain yang tersebar di berbagai belahan dunia. Karena peradaban manusia bermasyarakat manusia yang dapat dikenal adalah kelompok “gua”, maka dapat diduga manusia purba ini sudah mengenal bilangan, ditunjukkan oleh adanya coretan-coretan pada dinding gua, atau tumpukan-tumpukan kayu dan batu yang tertata rapi di suatu tempat diluar maupun didalam gua. Dengan menggunakan coretan atau tumpukan, mereka dapat menyatakan banyaknya binatang hasil buruan, banyaknya anggota keluarga atau anggota kelompok, atau banyaknya barang yang dimiliki. Sesungguhnya mereka sudah mengenal bilangan, yaitu konsep yang menyatakan “banyak” coretan atau tumpukan. Hal itu juga telah dikenal proses pemikiran korespondensi 1-1.

Penemuan sistem numerasi, seperti halnya penemuan alfabet dan penemuan roda, merupakan karya besar manusia. Dengan penemuan-penemuan tersebut, manusia dapat mewariskan pengetahuan dan keterampilannya dari satu generasi ke generasi berikutnya. Sistem numerasi adalah sekumpulan lambang dan aturan pokok yang menuliskan bilangan dapat dinyatakan dengan bermacam-macam lambang, tetapi suatu lambang tentu hanya menunjuk pada satu bilangan. Beda antara bilangan dan lambang (numeral) serupa dengan beda antara seseorang dengan namanya, beda benda dengan nama yang diberikan kepada benda itu, atau beda antara binatang dengan nama binatang yang ditunjuk.

Sesuai dengan urutan waktu terjadinya, beberapa system numerasi yang dikenal adalah sistem mesir Kuno ( $\pm 3000$  S.M), sistem Babilonia ( $\pm 2000$  S.M), sistem Yunani Kuno ( $\pm 600$  S.M), Maya ( $\pm 300$  S.M), sistem Jepang-Cina ( $\pm 200$  S.M), sistem romawi ( $\pm 100$  SM),

sistem Hindu-Arab (300 S.M-750 M). Ragam dari lambang-lambang bilangan yang digunakan antara lain:

### 1. Sistem Numerasi romawi (100 M)

Desimal	Romawi	Desimal	Romawi
1	I	100	C
5	V	500	D
10	X	1000	M
50	L		

### 2. Sistem Numerasi Hindu Arab

Hindu (300 S.M)	—	—	≡	τ	7	s	?			
Arab (10 M)		2	₳	₯	G	6	7	8	9	
Arab (20 M)		g	∑	O	7	v	Λ	¶	.	
Hindu (20 M)	1	2	3	4	5	6	7	२	9	o

## B. SISTEM HINDU ARAB

Sistem numerasi Hindu-Arab merupakan sistem numerasi yang paling banyak dipakai sekarang. Sistem ini mempunyai 10 lambang yang disebut angka (digit), yaitu : 0,1,2,3,4,5,6,7,8 dan 9. tidak diragukan lagi bahwa pemilihan 10 angka ini dipengaruhi oleh banyaknya 10 jari-jari tangan yaitu 10 (latin: decem), sehingga sistem Hindu-Arab disebut Desimal.

Beberapa sifat yang dimiliki sistem Hindu-Arab adalah:

- 1) Menggunakan 10 lambang (disebut angka), yaitu 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 dan 9
- 2) Bilangan-Bilangan yang lebih besar dari 9 dinyatakan sebagai bentuk suku – suku yang merupakan kelipatan dari perpangkatan 10.



- 3) Menggunakan nilai tempat, artinya lambang-lambang yang sama dengan tempat-tempat yang berbeda, misalnya 5 dari suatu bilangan yang lambangnya 5555, mempunyai nilai yang berbeda.

$$\begin{array}{ccccccc}
 5 & & 5 & & 5 & & 5 & = \\
 (5 \times 10^3) & + & (5 \times 10^2) & + & (5 \times 10) & + & 5 & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & 500 & & 50 & & 5 & \\
 & & & & & & & \\
 5000 & & & & & & & 
 \end{array}$$

- 4) Menggunakan sistem aditif

Sistem Hindu-Arab yang terus dipakai sekarang pada dasarnya bertumpu pada penggunaan lambang-lambang yang tersedia (tanpa menciptakan lambang baru) dengan jalan mengatur tempat dan mengelompokkan misalnya:

Mesir : | | | | | | | | | |       $\longrightarrow$   $\cap$   
Hindu-Arab : | | | | | | | | | |       $\longrightarrow$  10

Pengelompokan dilakukan untuk bentuk-bentuk perpangkatan dari 10, yaitu:

IIIIIIII	ditulis 10	disebut 1 puluhan
10 puluhan	ditulis 100	disebut 1 ratusan
10 ratusan	ditulis 1000	disebut ribuan
10 ribuan	ditulis 10000	disebut sepuluh-ribuan

Dan seterusnya Bilangan 10 disebut basis dari sistem numerasi itu.

- 5) Suatu sistem disebut multiplikatif jika mempunyai suatu basis  $b$  (misalnya  $b=10$ ), mempunyai lambang untuk bilangan-bilangan  $0,1,2,3, \dots, b-1$ , dan mempunyai lambang untuk  $b^2, b^3, b^4, \dots$  serta mempunyai nilai tempat.

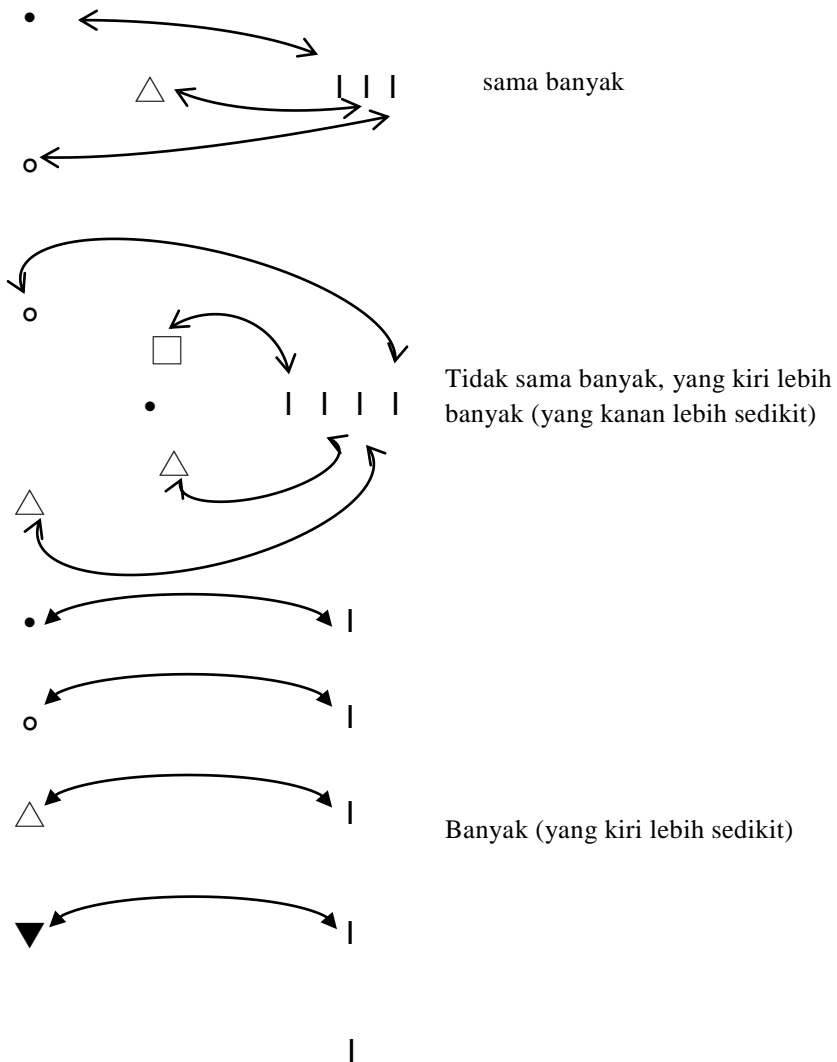
## C. MEMBILANG

Konsep tentang bilangan dan ide membilang telah berkembang sejak jaman prasejarah. Selama lebih kurang 15.000 tahun, sejak zaman batu hingga zaman sejarah, manusia telah mempelajari pertanian, mengembangkan kalender, membuat sistem pengukuran, menemukan dan menggunakan roda, membuat gerobak, membuat perahu dan menemukan sistem numerasi.

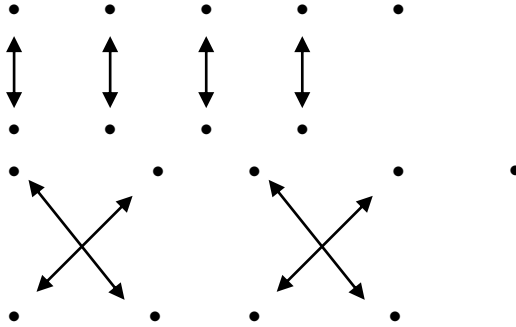
Pada zaman sejarah, diduga manusia telah menemukan konsep bilangan asli dan telah menemukan kumpulan lambang untuk menyatakan konsep bilangan asli, meskipun dalam bentuk paling sederhana yang berupa catatan-catatan. Bilangan-bilangan asli ini memang diperlukan oleh masyarakat pertanian untuk menghitung dan menjumlah. Matematisi Jerman Leopold Kronecker (1823-1891) menyatakan bahwa menjumlah; menyatakan bahwa “*God made the counting numbers, all the rest is the work of man*”. Ungkapan Kroker ini menunjukkan bahwa nampaknya bilangan asli itu ada sejak zaman manusia, sehingga bilangan asli itu dikatakan ciptaan Tuhan.

Adanya coretan pada dinding gua, atau tumpuan kayu atau batu yang ditempatkan secara khusus, merupakan petunjuk pada masyarakat zaman batu sudah dapat membilang (menghitung, mencacah) banyaknya sekumpulan benda. Cara membilang yang digunakan adalah dengan *tallies* (coretan) yaitu memasang 1-1 antara masing-masing benda dengan satu ciretan. Jadi secara tidak langsung mereka mengetahui ide satuan (oneness), duaan (twoness), tigaan, empatan, limaan, sepuluh, dan sebagainya. Jadi pada dasarnya pekerjaan membilang adalah pekerjaan membandingkan. Cara yang dipakai untuk membandingkan adalah mengkorespondensikan (memasangkan) benda, unsur, atau elemen suatu himpunan (pada awal sejarah bilangan, yang digunakan adalah coretan pada dinding gua, tumpukan kerikil, atau tumpukan batang atau ranting kayu). Hasil kegiatan membandingkan dengan cara memasang satu demi satu adalah hubungan *sama banyak* atau *tidak sama banyak*. Jika hubungan tidak sama banyak diperoleh, maka dapat ditentukan mana yang *lebih banyak* dan mana

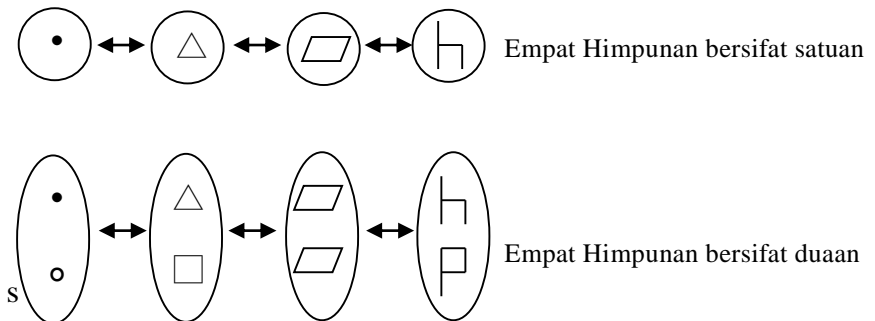
yang *kurang banyak* (lebih sedikit). Perhatikan beberapa peragaan berikut:



Cara memasang yang mudah adalah yang berpola, yaitu mengatur terlebih dahulu unsur unsur yang akan dipasangkan secara berderet-deret. Perhatikan cara memasang berikut:



Dari model memasangkan ini, dapat diketahui bahwa beberapa kelompok, tumpukan, gerombolan, atau himpunan benda mempunyai *sifat* yang sama, yaitu unsur-unsurnya dapat dipasangkan tepat satu-satu dengan unsur-unsur himpunan lain yang telah dipilih. *Sifat* yang sama inilah yang perlu punya nama atau sebutan yang disepakati bersama, yang disebut bilangan, sehingga memudahkan pembicaraan dan komunikasi antar manusia dalam menjalani kehidupannya. Jadi membilang berarti menyebut bilangan tentang banyaknya unsur suatu himpunan, yaitu sifat, satuan, duaan, tigaan, dan seterusnya.



Selanjutnya, untuk menyebutkan bilangan dari suatu himpunan diperlukan bahasa yang sama yang berupa lambang-lambang, sehingga dapat disusun lambang bilangan. Lambang-lambang bilangan selain lambang dasar (pokok) dari sistem Hindu-Arab adalah: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 dan 9. Lambang-lambang bilangan selain lambang dasar dibentuk dari gabungan lambang-lambang dasar dengan aturan tertentu, misalnya

345; 2798;  $3^9/11$ ; dan 0,32136. Lambang-lambang dasar dari sistem Hindu -Arab disebut angka (digit). Dengan membilang dapat diketahui berapa banyanyak elemen atau unsur suatu himpunan. Masalah membilang berkaitan dengan pertanyaan *berapa banyak (how many atau how much)*. Bilangan yang menyatakan hasil membilang disebut *kardinal*. Berapa contoh ungkapan atau kalimat yang menyatakan bilangan kardinal antara lain adalah:

1. Cindi mempunyai 5 pensil
2. Wildi membeli 3 kg beras
3. Megi menjawab 4 soal benar

Masing-masing kalimat diatas membicarakan banyaknya atau berapa banyak yang merupakan identifikasi bilangan kardinal suatu himpunan.

Selain bilangan kardinal, proses membilang dapat dikaitkan dengan aspek lain yang disebut bilangan *ordinal*. Bilangan ordinal adalah bilangan yang membicarakan unsur yang mana dari suatu himpunan. Tetapi, jika kita sebut “Mobil yang ke-4 di halaman itu berwarna merah”, maka bilangan yang sedang dibicarakan adalah bilangan ordinal. Menentukan bilangan ordinal, yaitu penentuan satu unsur yang mana (di dalam suatu himpunan) yang akan dibicarakan, terdapat proses *mengurutkan*.

## D. NILAI TEMPAT

Hasil membilang diperlukan bilangan, dan untuk menyatakan bilangan perlu lambang. Jika setiap dua bilangan yang berbeda mempunyai lambang atau susunan lambang yang sama sekali berbeda. Bisa dibayangkan bagaimana sulitnya kita mengingat jika bilangan-bilangan dari satu sampai seribu masing-masing menggunakan lambang yang sama sekali berbeda satu sama lain. Hal ini berarti orang perlu menciptakan lambang-lambang yang terbatas, dan membuat peraturan yang sistematis dan taat asaz untuk menyusun lambang bilangan yang manapun, sehingga terbentuk *sistem numerasi*.

Suatu sistem numerasi disebut sistem tempat jika nilai dari lambang-lambang yang digunakan menerapkan aturan tempat, sehingga lambang yang sama mempunyai nilai yang tidak sama karena tempatnya (posisinya) berbeda. Karena adanya kaitan antara nilai dan tempat, maka sistem tempat dikenal dengan sistem *nilai tempat*. Sistem nilai tempat yang pernah dikenal adalah sistem Mesir Kuno, sistem Yunani Kuno, sistem Cina, sistem Maya, dan Sistem Hindu-Arab.

Sistem nilai tempat yang digunakan masa kini adalah sistem Hindu-Arab. Sistem ini menentukan sepuluh lambang dasar (pokok) yang terdapat angka (digit), yaitu 0,1,2,3,4,5,6,7,8 dan 9. Pemilihan sepuluh angka dipengaruhi oleh banyaknya seluruh jari-jari tangan (kaki) yaitu sepuluh, sehingga sistem ini dikenal dengan sebutan sistem desimal (latin: decem = 10).

Penulisan lambang bilangan menggunakan pengelompokan kelipatan sepuluh:

1. Bilangan dari nol sampai dengan sembilan dilambangkan sama dengan lambang angka.

Nol = 0    Satu = 1    Dua = 2    Tiga = 3    Empat = 4    Lima = 5  
Enam = 6    Tujuh = 7    Delapan = 8    Sembilan = 9

2. Bilangan yang satu lebihnya dari bilangan sembilan disebut sepuluh. Bilangan sepuluh terdiri atas sepuluh satuan. Pengelompokan sepuluh satuan menjadi satu menghasilkan satu puluhan IIIIIIIII = 10 = 1 puluhan.

Lambang satu puluhan adalah 10. Lambang-lambang kelipatan sepuluh adalah:

20 = dua puluh, memuat dua puluhan

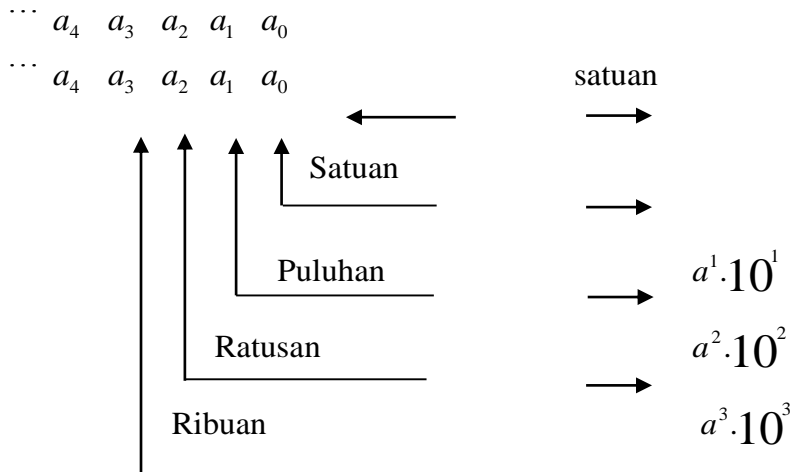
30 = tiga puluh, memuat tiga puluhan

90 = sembilan puluh, memuat sembilan puluhan

3. Bilangan-bilangan yang memuat puluhan dan satuan dilambangkan sesuai dengan banyaknya puluhan dan banyaknya satuan yang tidak dapat terkelompokkan menjadi puluhan.
4. Dengan jalan yang sama, pengelompokan dilakukan untuk sepuluh puluhan, sepuluh sepuluh puluhan, dan seterusnya, masing-masing dengan sebutan nama tertentu.

Sepuluh puluhan = seratus, ditulis 100  
 Sepuluh sepuluh puluhan = sepuluh ratusan = seribu,  
 ditulis 10.000

5. Secara keseluruhan, keadaan nilai tempat lambang bilangan dapat dinyatakan dengan berikut:



Karena sasaran pengelompokan dasar dalam menuliskan adalah sepuluh, maka sepuluh disebut sebagai *basis* atau *Dasar*. Perhatikan beberapa peragaan berikut:

$$\begin{aligned} 2398 &= 8 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3 \\ &= 8 \cdot 1 + 9 \cdot 10 + 4 \cdot 100 + 2 \cdot 1000 \\ &= 8 + 90 + 400 + 2000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 75432 &= 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^4 \\ &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 1000 + 7 \cdot 10000 \\ &= 2 + 30 + 400 + 5000 + 70000 \end{aligned}$$

Bentuk penulisan seperti ruas kanan itu disebut *bentuk panjang* lambang bilangan.

6. Dalam perkembangan berikutnya, suatu bilangan dinyatakan juga dalam basis bukan 10. Prinsip yang digunakan dalam basis bukan sepuluh serupa dengan yang digunakan dalam basis sepuluh. Jika  $b$  adalah bilangan bulat positif yang dipilih sebagai basis, maka angka-angka yang digunakan untuk

menyusun lambangnya adalah  $0, 1, 2, \dots, b-1$ , dan nilai bilangan dalam basis sepuluh dapat dicari dari :

$$(\dots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0)_b = a_0 \cdot b^0 + a_1 \cdot b^1 + a_2 \cdot b^2 + a_3 \cdot b^3 + a_4 \cdot b^4 + \dots$$

## E. PENGAJARAN BILANGAN DAN LAMBANGNYA DI KELAS 1-3

### 1. Pengertian bilangan Kardinal

Pengertian awal tentang bilangan, berkaitan dengan pengertian bilangan kardinal. Bilangan kardinal menunjukkan banyaknya unsur suatu anggota suatu himpunan, diperoleh dengan cara memasang unsur-unsur himpunan itu dengan himpunan bilangan asliurut mulai dari satu. Jadi membilang itu membawa pengertian asli.

Langkah-langkah awal untuk mengajarkan pengenalan bilangan kardinal adalah

- a. Menanamkan konsep sama, tidak sama, lebih dari, dan kurang dari.
- b. Tunjukkan kepada para peserta didik cara memasang, yaitu mengambil sembarang satu unsur dari himpunan yang pertama dilanjutkan dengan mengambil sembarang satu unsur dari himpunan kedua.
- c. Konsep sama diperkenalkan lebih dahulu melalui kegiatan pemasangan sedemikian rupa sehingga tidak ada yang tersisa atau tertinggal, dan sebutlah bahwa dua himpunan yang unsur-unsurnya dipasang mempunyai unsur-unsur yang sama banyaknya.
- d. Konsep tidak sama, lebih dari, dan kurang dari diperoleh dari kegiatan serupa, dengan adanya unsur dari salah satu himpunan yang tersisa, yang tertinggal atau yang tidak mempunyai pasangan katakan kepada mereka bahwa banyaknya unsur kedua himpunan *tidak sama*, dan himpunan yang mempunyai unsur yang tertinggal banyak unsur *lebih dari* banyaknya unsur himpunan yang lain.

### 2. Pengenalan Lambang Bilangan dan Nilai Tempat

Salah satu cara mengenalkan lambang bilangan ialah dengan kegiatan-kegiatan berikut:



- a. Guru mengambil dua benda dan meletakkan pada tempat yang berbeda (untuk menunjukkan bahwa kedua benda merupakan dua unsur dari himpunan yang berlainan), di meja, di tangan (kanan dan kiri), dan sebagainya.
- b. Peserta didik diajak membuat pasangan, dan mereka sampai pada suatu pendapat tentang pengertian *sama*. Pada akhir kegiatan, guru memberi tahu dan menjelaskan kepada peserta didik bahwa perlu menyebutkan *istilah* tertentu untuk menyatakan banyaknya benda dari masing-masing himpunan, yaitu *satu*.
- c. Untuk mengganti ucapan kata, istilah, sebutan atau nama satu, perlu lambang yang digunakan atau dipakai dalam tulisan. Guru kemudian menuliskan lambang satu di papan tulis.

1↓

*(tanda panah menyatakan arah gerakan menulis)*

- d. Ulangi kegiatan a, b dan c dengan menambah satu benda ke masing-masing himpunan. Secara tidak langsung, hal ini juga menunjukkan bahwa dua adalah lebih dari satu. Kemudian tunjukkan kepada mereka nama dua dan lambang dua serta menuliskannya

2

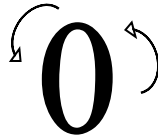
Kegiatan yang sama dilakukan untuk bilangan-bilangan sampai dengan sembilan, dengan cara menuliskan sebagai berikut

3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9

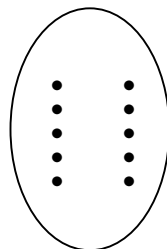
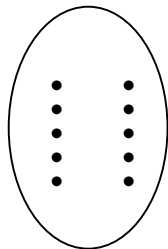
- e. Berilah peserta didik latihan secukupnya untuk masing-masing bilangan dan lambangnya sesuai dengan urutan dalam kurikulum
- f. Bilangan nol diperkenalkan melalui konsep “diambil” atau “dimakan”, misalnya:

- \* Cindi mempunyai tiga butir kelereng, semua kelereng Cindi diambil oleh Wildi. Tinggal berapa kelereng Cindi saat ini?
- \* Thia mempunyai dua jeruk. Dua adik Thia memakan semua jeruk milik Thia. Tinggal berapa jeruk Thia?

Dari banyak cerita yang dibuat, akhirnya mereka memperoleh istilah-istilah *habis*, tidak ada yang tersisa, atau istilah lain yang senada, dan menyebut istilah baru *Nol*, dengan lambang



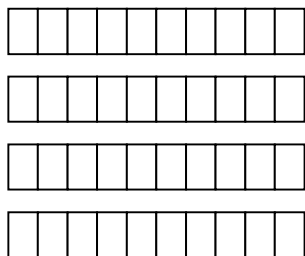
- g. Pengenalan nilai tempat dapat dijelaskan dengan memperkenalkan terlebih dahulu terbentuk bilangan sepuluh, yaitu satu lebihnya dari bilangan sembilan. Katakan bahwa banyaknya sama dengan semua jari tangan, atau sama banyaknya dengan semua jari kaki, sehingga penting untuk mempunyai nama baku, yaitu sepuluh, dan lambangnya: 10 sebagai satuan, tunjukkan pula kegiatan-kegiatan pengelompokan sepuluh benda.
- h. Usahakan konsep puluhan ini dapat dikembangkan menjadi dua puluhan, tiga puluhan, empat puluhan, ..., sembilan puluhan melalui pengelompokan – pengelompokan sepuluh. Lambang-lambang dari bilangan puluhan ini juga diperkenalkan bersama-sama nama bilangan:



= dua puluh = 20



= tiga puluh = 30



= empat puluh = 40

- i. Pengembangan nilai tempat dapat dikerjakan dari konsep 10,20,30,40, ...,90 konsep. 12,22,32,42, ...,92 dapat dilakukan serempak:

12 = sepuluh dan dua

22 = dua puluh dan dua

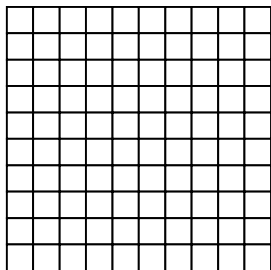
32 = tiga puluh dan dua

Kegiatan serupa dapat dilakukan untuk 13,23,33,....,93; 14,24,34,...,94; 15,25,35,....,95 dan akhirnya 19,29,39,49,....,99

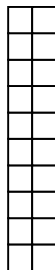
- j. Pemantapan konsep nilai tempat (sebatas puluhan) ini dilakukan melalui kegiatan-kegiatan sebagai berikut: 23 = dua puluh dan tiga satuan

$$= 20 + 3$$

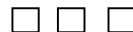
Guru menjelaskan sepuluh sebagai *ratusan* menggunakan benda atau peraga yang benar-benar mudah dipahami oleh peserta didik, misalnya:



Satu ratusan/sepuluh puluhan  
100 dan



dua puluhan  
20 dan

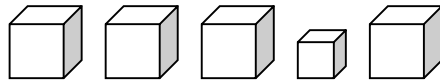


tiga satuan  
3 = 123

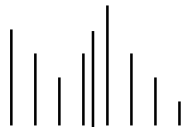
### 3. Pengenalan Bilangan Ordinal

Perlu dipahami bahwa lambang bilangan yang sama dapat bermakna bilangan kardinal. Jika dilambangkan itu menjawab *yang mana*, maka yang ditunjuk bilangan ordinal. Dengan jawaban yang mana, maka terkait di dalam konsep *urutan*.

Bilangan ordinal perlu dikenalkan kepada peserta didik untuk melengkapi uraian tentang bilangan kardinal (meskipun secara nyata istilah bilangan kardinal dan bilangan ordinal tidak perlu disampaikan kepada mereka). Cara mengenalkannya dengan serangkaian kegiatan dengan urutan, misalnya nomor rumah, nomor jalan, urutan mobil yang berjajar, urutan, dan/atau benda-benda lain yang disekitar peserta didik. Sebagai contoh perhatikan peragaan-peragaan berikut ini:



Kotak yang *keempat* adalah yang terkecil



Lidi yang terpanjang adalah lidi yang

Perlu ditekankan bahwa guru perlu hati-hati dalam menyebutkan kekhususan yang dimaksud. Penyebut harus jelas aturannya misalnya unsur ke 3 dari kiri, kanan, depan, atas, belakang, bawah, pedoman lain yang sudah ada (misalnya dari ruang tertentu, gedung tertentu, tiang bendera tertentu).

## F. PENGAJARAN BILANGAN DAN LAMBANGNYA DI KELAS 4-6

Sebagai kelanjutan pengajaran matematika di kelas 1-3, pengajaran bilangan dan lambangnya di kelas 4-6 dilakukan dengan menggunakan prinsip yang serupa. Bilangan yang dibicarakan sampai dengan jutaan, dan mengembangkannya dalam *bentuk panjang* misalnya:

$$\begin{aligned}
 23497 &= 7+9+400+3000+2000 \\
 &= 7+(9 \times 10)+(4 \times 100)+(3 \times 1000)+(2 \times 10000)
 \end{aligned}$$

Pengembangan pecahan *desimal* dapat dilakukan dengan menggunakan potongan-potongan karton yang tersedia dan memandangnya sebagai per-seratusan, per-sepuluh dan per-seribu

Per-sepuluh	Per-seratusan	Per-seribu	Nama	Lambang
			Tiga enam lima perseribu	0,365
...	...	...	...	...

Perlu diperhatikan juga **bentuk panjang** dari pecahan desimal:

$$0,35 = (3 \times 0,1) + (5 \times 0,01)$$

$$2,876 = (2 \times 1) + (8 \times 0,1) + (7 \times 0,01) + (6 \times 0,001)$$

$$45,23 = (4 \times 10) + (5 \times 1) + (2 \times 0,1) + (3 \times 0,01)$$

## TUGAS DAN LATIHAN

1. Apakah bilangan dibutuhkan manusia sebagai alat? mengapa?
2. Menurut anda apa yang terjadi jika semua orang tidak mengenal bilangan?
3. Tunjukkan paling sedikit dua contoh nyata kegunaan bilangan dari transaksi jasa?
4. Tunjukkan paling sedikit dua contoh nyata kegunaan bilangan dari masing-masing kegiatan berikut:
  - a. Perdagangan

- b. Transportasi
  - c. Komunikasi
  - d. Pembangunan gedung
  - e. Penentuan panjang
  - f. Olahraga
  - g. Kesehatan
  - h. Kedokteran
  - i. Pertanian
  - j. Hukum
5. Adakah sistem numerasi yang tidak mempunyai lambang nol? berilah contoh !
6. Jelaskan yang dimaksud dengan sistem numerasi dan berilah masing-masing sebuah contoh sifat berikut :
- a. Aditif
  - b. Multiplikatif
  - c. Pengelompokan sedehana
  - d. Bernilai tempat
7. a. Apa yang dimaksud dengan bilangan kardinal  
b. Apa yang dimaksud dengan bilangan ordinal  
c. Apa yang perbedaan dan kesamaan bilangan kardinal dan bilangan ordinal?
8. Coba uraikan cara anda menjelaskan konsep bilangan
- a. Sama
  - b. Tidak sama
  - c. Lebih dari
  - d. Kurang dari

## DAFTAR PUSTAKA

- D' Augustine, C.H. 1973. *Multiple Methods of Teaching Mathematics in the Elementary Schools*. New York: Harper & Crow
- Gatot M, dkk. 1985. *Pengantar Ilmu Bilangan*. Surabaya: Sinar Wijaya
- Sutawidjaja, A. Muhsetyo, G., Muchtar, A.K.,. 1991/1992. *Pendidikan Matematika2*. Jakarta: Depdikbud (Proyek Pengembangan PGSD).
- Sa'dijah Cholis. 1998/1999. *Pendidikan Matematika I*. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Proyek Pendidikan Guru Sekolah Dasar.

## BAB III

# BILANGAN CACAH

Ketika anak-anak menginjak bangku sekolah, mereka sudah mengenal lambang dan bagaimana membunyikan suatu bilangan cacah. Bahkan sebelum memasuki bangku sekolah, banyak anak yang sudah mampu membilang secara urut dari satu bilangan hingga sepuluh. Meskipun membilang itu tidak berarti bahwa anak sudah memahami atau menguasai aturan membilang, pengajaran matematika di sekolah dasar hendaknya tidak justru menghambat atau bahkan menghilangkan kemampuan yang sudah ada itu. Oleh karena itu menjadi tuntutan bagi seorang guru bagaimana mengembangkan pengetahuan anak tentang bilangan cacah ini sehingga bermanfaat bagi pemahaman materi matematika atau bahkan pengetahuan lainnya.

Seorang guru harus memahami dengan baik bagaimana mengajarkan konsep matematika yang abstrak menjadi suatu yang konkrit, yang mudah dipahami oleh siswa. Perlu diingat, bahwa pengalaman anak diluar sekolah sewaktu mereka masih dalam usia pra sekolah, mempunyai sumbangan yang sangat besar dalam membentuk pemahaman mereka tentang bilangan.



## A. KONSEP BILANGAN CACAH

Bilangan cacah dapat didefinisikan sebagai bilangan yang digunakan untuk menyatakan cacah anggota atau kardinalitas suatu himpunan. Jika suatu himpunan yang karena alasan tertentu tidak mempunyai anggota sama sekali, maka cacah anggota himpunan itu dinyatakan dengan nol, dan dinyatakan dengan lambang 0. Jika anggota dari suatu himpunan hanya terdiri dari satu anggota saja, maka cacah anggota himpunan tersebut adalah “satu” dan dinyatakan dengan lambang “1”.

Demikian seterusnya sehingga kita mengenal barisan bilangan hasil pencacahan himpunan yang dinyatakan dengan lambang sebagai berikut:

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,....

(Tanda “...” hendaknya diartikan sebagai “dan seterusnya”). Bilangan-bilangan inilah yang disebut bilangan cacah.

## B. OPERASI PADA BILANGAN CACAH

Ada beberapa operasi yang dapat dikenakan kepada bilangan-bilangan cacah. Operasi-operasi tersebut adalah: (1) penjumlahan; (2) pengurangan; (3) perkalian; dan (4) pembagian. Operasi-operasi itu mempunyai kaitan yang cukup kuat. Oleh karena itu pemahaman konsep dan keterampilan melakukan operasi yang satu akan mempengaruhi pemahaman konsep dan keterampilan melakukan operasi yang lain.

### 1. Operasi Penjumlahan

Operasi penjumlahan pada bilangan cacah pada dasarnya merupakan suatu aturan yang mengkaitkan setiap pasang bilangan cacah dengan suatu bilangan cacah yang lain. Jika  $a$  dan  $b$  adalah bilangan-bilangan cacah, maka jumlah dari kedua bilangan tersebut dilambangkan dengan “ $a + b$ ” yang dibaca “ $a$  atau  $b$ ” jumlah dari  $a$  dan  $b$ ”. Jumlah dari  $a$  dan  $b$  ini diperoleh dengan menentukan cacah gabungan himpunan yang mempunyai sebanyak  $a$  anggota dengan himpunan yang mempunyai

sebanyak  $b$  anggota, asalkan kedua himpunan tersebut tidak mempunyai unsur persekutuan.

Selanjutnya, sistem bilangan cacah terhadap operasi penjumlahan ini mempunyai beberapa sifat, yaitu: **sifat pertukaran, sifat identitas, dan sifat pengelompokan yang berbunyi:**

- Untuk setiap bilangan cacah  $a$  dan  $b$ , berlaku:  

$$a + b = b + a \quad (\text{Pertukaran})$$
- Untuk setiap bilangan cacah  $a$ , berlaku:  

$$a + 0 = 0 + a = a \quad (\text{Identitas})$$
- Untuk setiap bilangan cacah  $a, b$ , dan  $c$  berlaku:  

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (\text{Pengelompokan})$$

## 2. Operasi Pengurangan

Operasi pengurangan pada dasarnya merupakan kebalikan daripada operasi penjumlahan. Jika dalam suatu situasi penjumlahan, jumlahnya dan salah satu unsur penjumlahannya sudah diketahui, maka proses penentuan unsur penjumlahan yang lainnya menuntut operasi pengurangan. Oleh karena itu, dalam prakteknya jika sebuah bilangan cacah  $a$  dikurangi dengan bilangan cacah  $b$  menghasilkan bilangan cacah  $c$  (dilambangkan dengan  $a - b = c$ ), maka operasi penjumlahan yang terkait adalah  $b + c = a$ . Namun demikian, operasi pengurangan tidak memenuhi sifat-sifat yang dimiliki oleh operasi penjumlahan di atas.

Operasi pengurangan tidak memenuhi sifat pertukaran, sebab tidak setiap  $a$  dan  $b$  berlaku  $a - b = b - a$ . Sebagai contoh:  $7 - 3 \neq 3 - 7$ . Bahkan,  $a - b = b - a$  hanya akan dipenuhi oleh bilangan-bilangan yang sama, yakni  $a = b$ . Contoh:  $3 - 3 = 3 - 3$ .

Operasi pengurangan juga tidak memenuhi sifat identitas, sebab tidak bisa ditemukan adanya bilangan cacah  $a$  sehingga,  $a - 0 = 0 - a$ .

Operasi pengurangan juga tidak memenuhi sifat pengelompokan, sebab tidak bisa diperoleh bilangan-bilangan cacah  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  sehingga  $(a - b) - c = a - (b - c)$ .

Contohnya jika  $a = 8$ ,  $b = 4$ , dan  $c = 2$ . Maka  $(a - b) - c = (8 - 4) - 2 = 2$ , sedangkan  $a - (b - c) = 8 - (4 - 2) = 6$ .

### 3. Operasi Perkalian

Operasi perkalian bilangan cacah pada dasarnya dapat didefinisikan sebagai hasil penjumlahan berulang bilangan-bilangan cacah. Jika tidak  $a$  dan  $b$  bilangan-bilangan cacah, maka  $a \times b$  dapat didefinisikan sebagai  $b + b + b + \dots + b$  (sebanyak  $a$  kali). Oleh karena itu,  $4 \times 3$  akan sama dengan  $3 + 3 + 3 + 3$ , sementara itu  $3 \times 4$  sama dengan  $4 + 4 + 4$ . Jadi secara konseptual  $a \times b$  tidak sama dengan  $b \times a$ , akan tetapi kalau mau lihat hasil kalinya saja maka  $a \times b = b \times a$ . Dengan demikian operasi perkalian memenuhi sifat pertukaran.

Operasi perkalian juga memenuhi sifat identitas. Ada sebuah bilangan cacah yang kalau dikalikan dengan setiap bilangan cacah  $a$  maka hasil kalinya adalah tetap  $a$ . bilangan cacah tersebut adalah bilangan 1. Jadi,  $a \times 1 = 1 \times a$  untuk setiap bilangan cacah  $a$ .

Operasi perkalian juga memenuhi sifat pengelompokan, yaitu: Untuk setiap bilangan cacah  $a, b$ , dan  $c$  berlaku :  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ .

Di samping itu, perkalian bilangan cacah masih mempunyai satu sifat dalam kaitannya dengan operasi penjumlahan. Sifat ini menyatakan bahwa: Untuk setiap bilangan cacah  $a, b$ , dan  $c$  berlaku:  $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ . Sifat ini disebutkan dengan sifat penyebaran.

### 4. Operasi Pembagian

Operasi pembagian pada dasarnya merupakan kebalikan dari operasi perkalian. Jika sebuah bilangan cacah  $a$  dibagi bilangan cacah  $b$  menghasilkan bilangan cacah  $c$  (dilambangkan dengan  $a : b = c$ , maka konsep perkalian yang bersangkutan adalah  $c \times b = a$ . sebagaimana operasi pengurangan, maka operasi pembagian juga tidak memenuhi sifat pertukaran, sifat identitas, sifat pengelompokan, dan juga sifat penyebaran.

## C. PENGAJARAN OPERASI PADA BILANGAN CACAH DI KELAS 1-3

Perlu disadari bahwa ada dua pengetahuan yang perlu dibedakan di dalam belajar matematika, yaitu pengetahuan konseptual dan pengetahuan prosedural. Pengetahuan prosedural bilangan cacah mencakup pengetahuan tentang simbol, bahasa, dan aturan-aturan pengerjaan (operasi) dari bilangan-bilangan cacah. Sementara itu, pengetahuan konseptual berkaitan dengan pemahaman konsep. Seorang siswa yang sudah mampu menyebutkan nama bilangan, menulis lambang bilangan, dan mampu menjumlahkan atau melakukan operasi lain dikatakan sudah memiliki pengetahuan prosedural. Namun demikian, tidak dijamin bahwa anak tersebut sudah memiliki pengetahuan konseptual yang bersangkutan. Seorang anak dikatakan sudah mempunyai pengetahuan konseptual kalau anak tersebut mampu menjelaskan mengapa dia menjawab sebagaimana yang ia jawabkan, atau mampu memberikan argumen yang tepat terhadap apa yang dia lakukan.

### 1. *Penanaman Konsep Penjumlahan*

Pemahaman awal tentang konsep dan prosedur penjumlahan terbentuk dari pengalaman informal. Ketika anak-anak bermain, mereka mempunyai kesempatan untuk berbagi benda-benda yang mereka miliki, menghitung objek-objek yang ada di sekitar mereka, membandingkan tinggi dan jarak benda satu dengan yang lain, dan berbagai aktivitas lainnya. Anak-anak yang kurang pergaulan mempunyai landasan yang kurang kuat untuk perkembangan kemampuan matematikanya. Anak-anak di sekolah memerlukan kesempatan untuk berpartisipasi di dalam aktivitas-aktivitas yang mirip kegiatan bermain seperti yang sering mereka lakukan di luar kelas. Anak usia dini seperti siswa kelas 1 sampai kelas 3 masih sangat dominan kegiatan bermainnya. Bermain merupakan kebutuhan yang utama bagi siswa dalam usia sedini itu. Oleh karena itu, guru perlu merancang kegiatan belajar mengajar matematika yang mempunyai nuansa seperti bermain, sehingga anak betah belajar dan memahami konsep matematika dengan baik. Jika mereka sudah siap,

situasi baru dan material-material perlu diperkenalkan untuk memperluas pengetahuannya.

Aktivitas-aktivitas yang dapat membentuk pemahaman intuitif seorang siswa tentang penjumlahan bilangan cacah hendaknya menjadi bagian yang integral dari upaya mereka ketika mereka belajar menghitung hingga sepuluh dan seterusnya. Untuk membantu mereka, kita bisa mulai dengan mengajukan beberapa pertanyaan untuk merangsang pikiran mereka tentang situasi-situasi yang melibatkan penjumlahan dengan menggunakan benda nyata seperti contoh berikut:

- Kamu mempunyai delapan kelereng biru dan tiga kelereng merah. Apakah banyaknya kelereng merah lebih banyak dari banyaknya kelereng itu? Bagaimana kamu mengetahuinya? Jika memang demikian, berapakah kelebihan kelereng birunya?

### **Aktivitas 1.**

- Mulai dengan menggunakan benda-benda yang dikenal dengan baik oleh para siswa, misalnya himpunan dua boneka mainan dan himpunan tiga boneka mainan.
- Minta kepada para siswa untuk menghitung banyaknya boneka mainan di masing-masing himpunan.
- Minta kepada para siswa untuk menjadikan satu kedua himpunan boneka dan minta kepada para siswa untuk menentukan jumlah totalnya.
- Mengulangi hal seperti itu dengan menggunakan mainan atau benda-benda lainnya, seperti mobil-mobilan, buku, kertas, lidi, atau apa saja yang ada disekitar kelas dan dikenal dengan baik oleh siswa. Bahkan gambar dari sosok pahlawan dalam film kartun yang sangat populer akan membantu menggairahkan siswa belajar matematika jika gambar-gambar itu kita gunakan dalam kegiatan ini.

Aktivitas di atas dimaksudkan untuk mengerjakan atau menanamkan konsep penjumlahan bilangan cacah sebagai gabungan dua himpunan. Penganekaan aktivitas seperti ini sangat diperlukan untuk memantapkan penanaman konsep penjumlahan bilangan cacah. Perlu

ditekankan akan keberadaan benda kongkret dalam melaksanakan aktivitas ini. Kalau benda yang ingin dijadikan sebagai alat belajarnya adalah mainan, maka guru perlu mengupayakan keberadaan mainan itu secara nyata di depan para siswa. Gambar dari mainan mempunyai dimensi yang berbeda dengan benda mainannya. Oleh karena itu, guru harus berupaya agar benda yang hendak dijadikan alat bantu mengajar adalah benda kongkret sehingga bisa diraba, dipegang-pegang, dan dipindahkan dari satu tempat ke tempat yang lain oleh siswa.

Selanjutnya, setelah memahami konsep penjumlahan itu dengan baik, para siswa dapat dibawa ke tahap berikutnya, yaitu mulai mengenal tanda atau simbol yang digunakan untuk menyatakan hasil dari suatu penjumlahan.

## 2. *Pengenalan Fakta Dasar Penjumlahan*

Tabel penjumlahan bilangan cacah perlu dibuat, dan itu akan lebih memberikan pemahaman kepada siswa bila pengisian tabel dilakukan oleh siswa itu sendiri.

### Aktivitas 2.

- Siapkan sebuah tabel kosong untuk penjumlahan bilangan cacah mulai dari bilangan 0 sampai dengan 9 seperti berikut :

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

- Mintalah kepada para siswa untuk mengisi tabel yang kosong tersebut.

- Minta kepada para siswa untuk menemukan pola yang ada pada tabel tersebut (Jangan lupa untuk senantiasa memberikan penguatan kepada setiap usaha siswa untuk menemukan pola, karena hal itu akan memelihara antusias siswa untuk belajar. Jadi jangan kecewakan siswa dengan tidak menghargai upayanya). Pola yang dapat ditemukan tentu akan bervariasi, dan guru jangan berharap bahwa siswa akan berpikir seperti dirinya sehingga semua pola dan fakta dasar yang menurut guru perlu dikenali akan dapat ditemukan oleh siswa. Oleh karena itu, guru perlu menjadi katalisator agar siswa mencoba memikirkan pola yang tidak pernah terpikir dalam benak siswa. Namun demikian, sebelum guru bertindak sebagai katalisator, hendaknya para siswa diberi kesempatan terlebih dahulu untuk mengungkapkan segala yang dipikirkannya tanpa bantuan guru.

### 3. *Penguasaan Fakta Dasar Penjumlahan*

Fakta dasar penjumlahan yang telah dikenalkan di atas perlu dikuasai dengan baik sehingga fakta-fakta dasar ini dapat digunakan dengan mudah nantinya di kala mempelajari konsep yang lebih lanjut. Penguasaan fakta dasar ini bisa dilakukan dengan cara sering mengulang-ulang ingatan siswa terhadap fakta-fakta dasar tersebut. Cara yang dilakukan dapat dilakukan dengan metode “*drill and practice*” dengan memberikan soal-soal tentang fakta dasar tersebut dan dikerjakan secara tertulis di buku, tetapi dapat pula dengan melakukan permainan (*games*). Permainan dengan domino atau kartu *bridge* yang sudah dimodifikasi dapat dilakukan untuk menguasai fakta dasar ini. Bahkan permainan akan memberikan suasana yang lebih menyenangkan bagi siswa dalam mempelajari fakta dasar ini. Suasana permainan, tutorial dari teman sejawat pada waktu bermain, dan banyak lagi suasana yang menyenangkan pada waktu melakukan permainan, memberikan sumbangan yang sangat besar bagi penguasaan fakta dasar ini. Oleh karena itu, seorang guru perlu membuat atau menyediakan fasilitas permainan matematika agar suasana menjadi lebih memungkinkan bagi siswa untuk belajar dengan baik.

#### 4. *Algoritma Penjumlahan*

Setelah menguasai konsep dasar penjumlahan dan fakta-fakta dasar, para siswa untuk siap belajar algoritma penjumlahan. Namun demikian, hendaknya pengajaran algoritma penjumlahan ini juga memberikan pemahaman sehingga siswa memahami dengan betul makna dari algoritma itu, dan mengapa algoritma ini diperlukan. Sebagai contoh misalnya kepada siswa diberikan soal: “ $23 + 146 = x$ , berapakah nilai dari  $x$ ?”.

Jika kita mengajarkan sebagaimana urutan pengajaran di atas, maka dapat diharapkan atau diduga bahwa anak akan mencari rujukan cara melakukan penjumlahan bilangan diatas. Mereka akan mencoba mencari himpunan benda-benda kongkret di sekitar mereka yang cacahnya 23 dan 146. Tentunya mereka akan menjumpai kesulitan. Guru perlu bertanya kepada siswa tentang apa yang harus dilakukan, dan pada waktu siswa menjawab sesuai dengan yang disebut di atas guru perlu menjelaskan bahwa cara yang dilakukan adalah sangat tepat, namun untuk bilangan-bilangan yang besar demikian cara tersebut kurang efektif. Perlu ditemukan cara yang memudahkan penyelesaiannya, dan jelaskan bahwa kini tiba saatnya para siswa mempelajari apa yang disebut dengan algoritma penjumlahan.

Untuk memberikan pemahaman dengan baik, maka alat peraga seperti Batang *Cuisenaire* atau Kubus *Unifix* dapat digunakan untuk mengenalkan algoritma penjumlahan. Sebagaimana diketahui, batang *Cuisenaire* terdiri atas batang satuan, batang puluhan, batang ratusan, dan batang ribuan. Batang satuannya berbentuk kubus dengan dimensi 1 cm x 1 cm x 1 cm, batang puluhannya berbentuk balok yang besarnya sama dengan sepuluh batang satuan yang dijadikan satu sehingga memanjang dengan dimensi 10 cm x 10 cm x 10 cm, batang ratusannya berbentuk balok yang besarnya sama dengan sepuluh batang puluhan yang dgabung menjadi satu dengan dimensi 10 cm x 10 cm x 10 cm, dan batang ribuan yang berbentuk kubus yang bsarnya sama dengan sepuluh batang ratusan dikumpulkan dengan dimensi 10 cm x 10 cm x 10 cm. Sebagai contoh perhatikan pengajaran algoritma penjumlahan dengan menggunakan batang *Cuisenaire*.



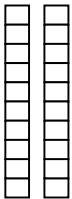

### Aktivitas 3.

Berikan kepada siswa batang *Cuisenaire* secukupnya sehingga bisa digunakan untuk menyatakan jumlah dari bilangan cacah 23 dan 146. Berikan pula kepada siswa satu lembar kertas untuk menempatkan batang *Cuisenaire* sebagai representasi bilangannya.

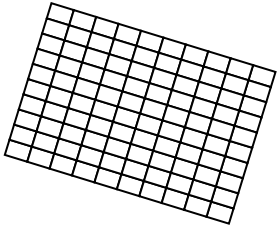
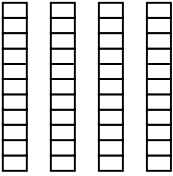
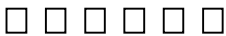
Gambar dari kertas itu adalah sebagai berikut:

Batang Ratusan	Batang Puluhan	Batang Satuan

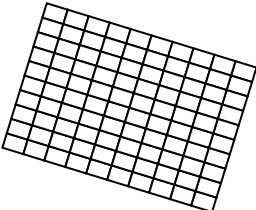
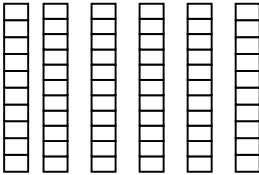
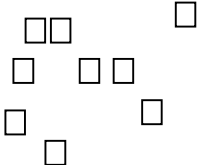
- Beritahukan aturan main penempatan batang *Cuisenaire* dalam lembar kertas tersebut, yaitu bahwa setiap kolom hanya boleh di isi tidak lebih dari **sembilan batang**, dan **sepuluh batang satuan harus ditukar dengan satu batang puluhan**, dan **sepuluh batang puluhan harus ditukar dengan satu batang ratusan**.
- Tunjukkan bahwa bilangan 23 dapat direpresentasikan dengan menggunakan batang *Cuisenaire* sebagai berikut :

Batang ratusan	Batang puluhan	Batang satuan
		

- Tunjukkan bahwa bilangan 146 dapat direpresentasikan dengan menggunakan batang *Cuisenaire* sebagai berikut :

Batang Ratusan	Batang Puluhan	Batang Satuan
		

- Tunjukkan bahwa untuk menjumlahkan kedua bilangan tersebut, kita dapat melakukannya dengan menggabungkan batang - batang pada kedua tabel itu kedalam satu tabel saja sebagai berikut :

Batang Ratusan	Batang Puluhan	Batang Satuan
		

- Akhirnya, tabel yang terakhir ini dibaca bersama dengan memberikan pertanyaan berapa banyak batang ratusan-nya, banyak batang puluhan-nya, dan banyak batang satuan-nya. Dari itu dituliskanlah simbol banyak bilangan masing-masing kolom dan dituliskan secara berdampingan dari kiri ke kanan sesuai dengan urutan Batang ratusan Batang puluhan Batang satuan. Bilangan yang terakhir inilah yang

merupakan hasil penjumlahan dari 23 dan 146 di atas, yaitu bilangan 169.

### 5. *Pembentukan Keterampilan Hitung Penjumlahan*

Setelah siswa memahami algoritma penjumlahan, langkah berikutnya adalah memantapkan kemampuan melakukan algoritma penjumlahan tersebut. Hal ini dapat dilakukan dengan melakukan beberapa tahap kegiatan sebagai berikut:

Misalkan bilangan yang akan dijumlahkan adalah 247 dan 165.

#### Tahap I

- Pertama kali tanyakan kepada siswa tentang makna dari angka 7 pada bilangan 247 dan angka 5 pada bilangan 165.
- Tanyakan apakah kedua bilangan ini dapat dijumlahkan, dan mintalah penjelasan mengapa keduanya bisa dijumlahkan.
- Tanyakan apa akibatnya jika kedua bilangan ini dijumlahkan (Ingatkan siswa kepada sifat dari tabel pada waktu menjumlahkan dengan menggunakan batang *Cuisenaire*).
- Tanyakan kepada siswa bagaimana kondisi dari bilangan puluhannya saat ini.
- Mintalah keterangan kepada siswa apa akibat dari penjumlahan ini (Ingatkan bahwa kapasitas untuk batang puluhan-nya melampaui batas).
- Tanyakan kepada siswa bagaimana keadaan dari bilangan ratusannya saat ini.
- Akhirnya mintalah siswa menentukan jawab dari masalah di atas.

#### Tahap II

Setelah tahap pertama dilalui, gunakan papan tulis untuk memberikan penjelasan tentang langkah-langkah yang telah dilalui diatas. Akan tetapi, di papan tulis ini hanya lambang bilangannya saja yang digunakan (tidak ada lagi gambar batang *Cuisenaire* di papan), sehingga akan tertera gambar-gambar sebagai berikut:

a)

$$\begin{array}{r} 2 \quad 4 \quad 7 \\ 1 \quad 6 \quad 5 \\ \hline 12 \end{array} +$$

1 ----- berasal dari 10 satuan hasil penjumlahan satuan

b)

$$\begin{array}{r} 2 \quad 4 \quad 7 \\ 1 \quad 6 \quad 5 \\ \hline 2 \end{array} +$$

c)

$$\begin{array}{r} \quad 1 \\ 2 \quad 4 \quad 7 \\ 1 \quad 6 \quad 5 \\ \hline 11 \quad 2 \end{array} +$$

d) berasal dari 10 puluhan dari penjumlahan bilangan puluhan

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 4 \quad 7 \\ 1 \quad 6 \quad 5 \\ \hline 1 \quad 2 \end{array} +$$

e)

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 4 \quad 7 \\ 1 \quad 6 \quad 5 \\ \hline 4 \quad 1 \quad 2 \end{array} +$$

Dengan demikian hasil penjumlahannya adalah 412.

### Tahap III

Setelah para siswa mempunyai pemahaman yang mantap terhadap algoritma penjumlahan bilangan cacah, maka kepada siswa diajarkan bagaimana menuliskan proses penjumlahan ini dalam satu bagan saja, seperti berikut:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 4 \quad 7 \\ 1 \quad 6 \quad 5 \\ \hline 4 \quad 1 \quad 2 \end{array} +$$

Yakni kita hanya menuliskan proses terakhir pada tahap II dengan memberikan penjelasan sebagai berikut:

- Pada kolom satuan, jika jumlah bilangan satuan-satuannya kurang dari 10 maka langsung ditulis hasilnya. Tetapi, jika hasilnya 10 atau lebih maka yang ditulis adalah angka satuannya saja sedangkan angka puluhannya dituliskan di atas baris paling atas di atas kolom puluhan dan disebut sebagai “simpanan.”
- Pada kolom puluhan, angka-angka puluhan dan hasil simpanannya ini dijumlahkan. Jika hasilnya kurang dari 10 maka langsung ditulis angkanya, tetapi jika hasilnya sepuluh atau lebih, maka yang ditulis adalah angka satuannya saja dan angka puluhannya ditulis di baris paling atas (sejajar dengan hasil simpanan dari penjumlahan satuan) di atas kolom ratusan.

Akhirnya, semua bilangan pada kolom ratusan ini dijumlahkan (termasuk simpanan dari penjumlahan puluhan), dan hasilnya menyatakan bilangan ratusannya.

#### **D. PENGAJARAN PENJUMLAHAN DI KELAS 4-6**

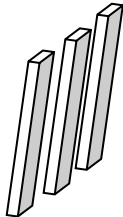
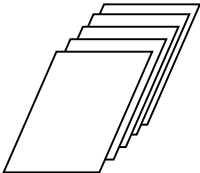
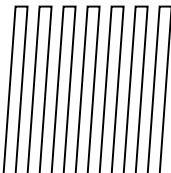

Pengajaran penjumlahan di kelas 4-6 pada dasarnya mengikuti pola pengajaran penjumlahan di kelas 1-3. Akan tetapi, di kelas 1-3 pengalaman dengan benda-benda kongkret merupakan kebutuhan yang utama, sedangkan di kelas 4-6 kebutuhan akan pengalaman dengan benda kongkret untuk penjumlahan bilangan cacah ini tidak lagi terlalu besar. Pengalaman dengan benda kongkret di kelas 1-3 lazimnya telah memberikan cukup bekal untuk bisa mengikuti pelajaran penjumlahan di kelas 4-6. Akan tetapi, setiap kali mengajarkan konsep yang baru, seorang guru senantiasa dituntut untuk memberikan pengalaman dengan benda kongkret kepada siswa. Kita tidak boleh membuat asumsi yang macam-macam tanpa bukti yang memadai, sebab apa yang kita asumsikan belum tentu sesuai dengan kondisi siswa. Setiap siswa adalah unik, dan hampir tidak ada suatu teori yang bisa diterapkan kepada semua siswa. Banyak kasus dimana suatu teori gagal untuk memberikan penjelasan.

### 1. Peningkatan Keterampilan Menjumlah

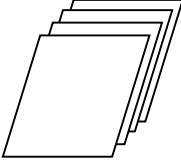
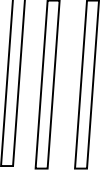

Agar siswa menjadi semakin terampil menjumlahkan, maka kepada siswa kelas 4-6 ini perlu dikenalkan dengan bilangan-bilangan yang lebih besar daripada bilangan yang telah mereka kenal di kelas 1-3. Kalau di kelas 1-3 mereka hanya diajarkan bilangan sampai 1000, maka untuk kelas 4-6 mulai perlu dikenalkan bilangan puluhan ribu, ratusan ribu, dan bahkan jutaan.

Sebagai contoh perhatikan penjumlahan bilangan 3576 dan 438 berikut:

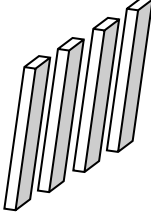


Pertama kali yang harus dilakukan oleh guru adalah mengulang kembali penjumlahan bilangan dengan menggunakan batang *Cuisenaire* yang sekarang harus melibatkan batang ribuan karena ada angka ribumannya. Dengan begitu kita akan melihat tabel representasi dari bilangan 3576 adalah:

Batang ribuan	Batang ratusan	Batang puluhan	Batang satuan
			

Sementara itu, representasi dari bilangan 438 adalah:

Batang ribuan	Batang ratusan	Batang puluhan	Batang satuan
			

Penggabungannya (penjumlahan dari kedua bilangan itu) akan menghasilkan tabel sebagai berikut:

Batang ribuan	Batang ratusan	Batang puluhan	Batang satuan
			

Hal ini menunjukkan bahwa jumlahnya sama dengan 4014 karena ada 4 batang ribuan batang ratusan, 1 batang puluhan, dan 4 batang satuan.

Selanjutnya, tanpa terlalu banyak bermain dengan alat peraga ini kepada mereka bisa langsung diajarkan algoritma yang abstrak, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{array}{r}
 \phantom{0}1 \phantom{0}1 \phantom{0}0 \phantom{0}0 \phantom{0}0 \phantom{0}0 \text{ (tempat simpanan)} \\
 3 \phantom{0}5 \phantom{0}7 \phantom{0}6 \\
 \phantom{0}4 \phantom{0}3 \phantom{0}8 \\
 \hline
 4 \phantom{0}0 \phantom{0}1 \phantom{0}4 \phantom{0}0 \phantom{0}0 \phantom{0}0
 \end{array}
 +$$

## 2. Pengamatan Sifat Dan Pola Penjumlahan

Di kelas 1-3 pola dan sifat penjumlahan bilangan diserahkan kepada siswa, tetapi pengamatan pola dan sifat penjumlahan bilangan-bilangan cacah oleh siswa kelas 4-6 perlu dibimbing oleh guru supaya lebih intensif.

Pengamatan sifat pertukaran dapat dilakukan dengan berbagai cara seperti berikut:

### Aktivitas 4.

- Gunakan bantuan batang *Cuisenaire* untuk menunjukkan bahwa  $a + b = b + a$  untuk setiap pasang bilangan cacah  $a$  dan  $b$ . Lakukan hal ini dengan menjumlahkan sebanyak-banyaknya pasangan bilangan cacah  $a$  dan  $b$ .
- Minta kepada para siswa untuk mengamati tabel penjumlahan yang dimilikinya, dan suruhlah mereka untuk mencari jumlah  $a + b$  dan jumlah  $b + a$  untuk bilangan-bilangan cacah  $a$  dan  $b$  dalam tabel tersebut. Mintalah kepada para siswa untuk memperhatikan bahwa tabel yang diperoleh adalah tabel yang simetris terhadap sumbu diagonal utamanya.
- Gunakan potongan pita. Satu pita menyatakan  $a$  dan pita yang lain menyatakan  $b$ . hubungkan pita itu dengan urutan pita  $a$  di sebelah kiri dan pita  $b$  disebelah kanannya. Kemudian buat pula sambungan dengan pita  $b$  di sebelah kiri dan pita  $a$  di sebelah kanan. Mintalah siswa untuk membandingkan panjang kedua pita tersebut.

Untuk mengajarkan sifat identitas, penggunaan batang *Cuisenaire* sebagaimana dalam mengajarkan algoritma penjumlahan bilangan cacah dapat digunakan untuk memberikan pemahaman yang cukup memadai. Penggunaan tabel juga akan berguna bagi siswa kelas 4-6. Dengan arahan dari guru mereka akan dapat melihat bahwa penambahan bilangan dengan bilangan nol tidak mengubah bilangan pertama itu.

Sifat yang terakhir yang perlu dikenalkan kepada siswa adalah sifat pengelompokan atau sifat asosiatif. Sifat ini menyatakan bahwa jika  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  adalah tiga bilangan cacah (boleh sama boleh berbeda), maka  $(a + b) + c = a + (b + c)$ . Sifat ini cukup penting bukan hanya untuk



membantu siswa menyederhanakan perhitungan (dengan bantuan sifat pertukaran), tetapi juga memperluas konsep anak tentang konsep penjumlahan. Dengan memahami konsep pengelompokan ini mereka akan mampu memahami bahwa  $8 + 5 = 8 + (2 + 3) = (8 + 2) + 3 = 10 + 3 = 13$ .

Untuk membuat siswa menyadari akan sifat pengelompokan ini di dalam penjumlahan bilangan cacah, kita dapat mulai dengan menggunakan fasilitas batang *Cuisenaire*, dan kemudian menggunakan fakta-fakta dasar. Latihan soal-soal yang diberikan baik dengan menggunakan batang *Cuisenaire* maupun yang menggunakan fakta-fakta dasar akan membantu penguasaan siswa akan sifat pengelompokan ini.

## E. PENGAJARAN PENGURANGAN DI KELAS 1-3

Pengajaran operasi pengurangan setelah operasi penjumlahan tidak lebih mudah dari pengajaran operasi perkalian. Oleh karena itu, guru perlu memberikan penekanan yang cukup besar pada pengajaran pengurangan bilangan cacah.

### 1. *Penanaman Konsep Pengurangan*

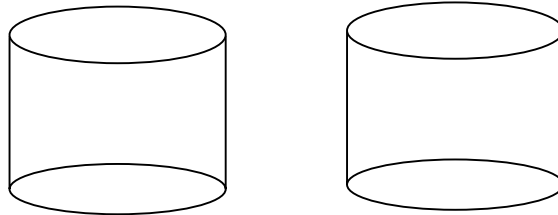
Untuk menanamkan konsep pengurangan bilangan cacah pada siswa, guru perlu mengaitkan konsep pengurangan ini dengan konsep yang telah dimiliki sebelumnya oleh siswa. Oleh karena itu, penanaman konsep pengurangan bilangan cacah hendaknya dimulai dengan mengajarkan penjumlahan dengan salah satu bilangan belum diketahui.

Sebagai contoh:

Di dalam tabung ini terdapat 7 kelereng. Berapa kelereng lagikah yang perlu ditambahkan pada tabung itu sehingga menjadi sepuluh kelereng?

- Sebagaimana biasa, ketika kita mau mengenalkan suatu konsep baru, maka pengalaman dengan benda nyata harus senantiasa diberikan seperti yang telah saya kemukakan untuk contoh-contoh penjumlahan bilangan di muka. Dalam kasus ini, para siswa hendaknya memang diberi tabung dan sejumlah kelereng agar mereka bisa merasakan dan menghayati apa yang harus mereka lakukan.

- Setelah siswa mempunyai pengalaman yang cukup dengan benda-benda kongkret mengenai penjumlahan yang salah satu bilangannya tidak diketahui, maka langkah berikutnya adalah dengan mengajak siswa untuk belajar di tahap yang lebih tinggi, yaitu menggunakan gambar dari benda-benda yang kita gunakan sebelumnya.



- Kemudian, setelah pengalaman menyelesaikan permasalahan ini dengan menggunakan gambar dianggap cukup memadai, maka gambar yang ada perlu mulai dikaitkan dengan simbol bilangannya, sehingga pada akhirnya anak akan mulai mengenal bentuk seperti berikut :  $7 + \square = 10$  dan  $\square + 7 = 10$ .

Selanjutnya dengan memperhatikan contoh-contoh di atas, para siswa perlu mulai dikenalkan dengan kenyataan bahwa simbol-simbul:  $7 + \square = 10$  dan  $\square + 7 = 10$  adalah ekuivalen dengan simbol  $10 - 7 = \square$  yang dikenal dengan istilah pengurangan. Dari sinilah kita mulai mengajarkan pengurangan bilangan cacah tersebut. Kita ajarkan dengan menggunakan alat peraga, baik berupa himpunan manik-manik, himpunan boneka mainan, ataupun dengan himpunan batang *Cuisenaire*. Sebagai contoh, bila kepada siswa diberikan soal  $23 - 8 = \square$ , maka di depan siswa kita berikan sehimpunan yang terdiri dari 23 manik-manik, dan keluarkan 8 manik dari padanya dan banyaknya manik-manik yang tersisa di dalam himpunan itulah yang menyatakan hasil pengurangannya.

## 2. Pengenalan Fakta Dasar Pengurangan

Beberapa fakta dasar di dalam pengurangan bilangan cacah juga mulai dikenalkan kepada siswa. Hal ini untuk memperkuat pemahaman siswa, sebab dengan memperbandingkan fakta-fakta dasar penjumlahan dengan fakta-fakta dasar pengurangan, maka struktur kognitif siswa akan

semakin rapi dan jalinan antara pengetahuan yang satu dengan pengetahuan yang lain akan semakin mapan.

Kegiatan yang dapat dilakukan antara lain:

#### **Aktivitas 5.**

- Tanyakan kepada siswa beberapa fakta dasar tentang penjumlahan, khususnya tentang sifat pertukaran, identitas, dan pengelompokannya.
- Mintalah siswa untuk menuliskan kembali sifat dari fakta dasar tersebut dengan mengubah simbol “+” dengan simbol “-”.
- Mintalah siswa untuk menyelidiki apakah sifat-sifat tersebut masih berlaku atau tidak (dengan memeriksa beberapa kasus pengurangan pasangan bilangan cacah).

### **3. *Penguasaan Fakta Dasar Pengurangan***

Setelah siswa mulai melihat hubungan antara fakta dasar penjumlahan dan pengurangan, langkah berikutnya adalah memperkuat pemahaman awal tentang fakta dasar pengurangan bilangan cacah ini dengan memberikan latihan yang cukup banyak tentang pengurangan bilangan cacah. Semakin banyak latihan diberikan akan semakin memperkuat pemahaman mereka akan sifat-sifat dari fakta dasar tersebut.

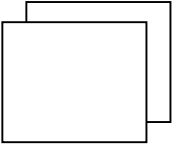
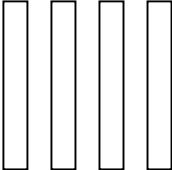

### **4. *Algoritma Pengurangan***

Pengajaran algoritma pengurangan bilangan cacah pada dasarnya sama seperti mengajarkan algoritma penjumlahan bilangan cacah. Jadi pada dasarnya pengajaran tentang algoritma ini harus dibuat yang bermakna dulu dengan membuat algoritma ini menjadi kongkret. Batang *Cuisenaire* dan kubus *Unifix* yang dikembangkan dengan berdasar nilai tempat merupakan alat peraga yang sangat baik di dalam menerangkan algoritma pengurangan ini. Sebagai contoh, perhatikan cara mengajarkan pengurangan  $247 - 135$  berikut:

#### **Aktivitas 6.**

- Berikan secukupnya batang *Cuisenaire* atau kubus *Unifix* kepada siswa sehingga bisa digunakan untuk merepresentasikan bilangan 247 pada lembar nilai tempatnya.

- Mintalah kepada para siswa untuk meletakkan batang-batang *Cuisenaire* – nya atau kubus-kubus *Unifix* – nya pada lembar nilai tempatnya sehingga merepresentasikan bilangan 247 sebagai berikut:

Batang ratusan	Batang puluhan	Batang satuan
		

- Mintalah kepada siswa untuk mengeluarkan 5 batang dari kolom batang satuan, 3 batang dari kolom batang puluhan, dan 1 batang dari kolom batang ratusan dari lembar nilai tempat tersebut.
- Jelaskan kepada siswa bahwa siswa batang-batang yang ada pada lembar nilai tempat itulah representasi dari bilangan sisa pengurangannya.
- Mintalah kepada para siswa untuk membaca representasi tersebut.

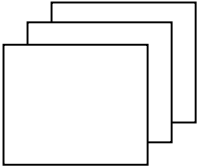


Selanjutnya, ajaklah siswa untuk menuliskan simbol atau lambang dari proses pengurangan tersebut sebagai berikut:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 4 \quad 7 \\ 1 \quad 3 \quad 5 \quad - \\ \hline 1 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

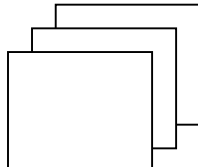
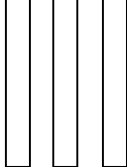
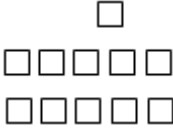
Untuk menambahkan pemahaman tentang algoritma pengurangan ini, maka perlu diberi contoh pengurangan yang memerlukan peminjaman. Sebagai contoh perhatikan bagaimana menentukan hasil pengurangan  $345 - 256$  berikut:

### Aktivitas 7.

- Berikan secukupnya batang *Cuisenaire* atau kubus *Unifix* kepada siswa sehingga bisa digunakan untuk merepresentasikan bilangan 345 pada lembar nilai tempatnya.
- Mintalah kepada siswa untuk meletakkan batang-batang *Cuisenaire* – nya atau kubus-kubus *Unifix* – nya pada lembar nilai tempatnya sehingga merepresentasikan bilangan 342 sebagai berikut :

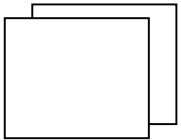
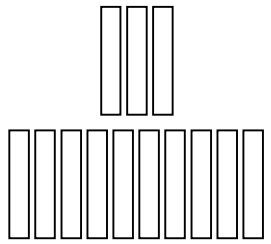

Batang ratusan	Batang puluhan	Batang satuan
		

- Mintalah kepada para siswa untuk mengambil 6 batang dari kolom satuan dan perhatikan reaksi mereka.
- Tanyakan kepada mereka apa yang dapat dan perlu dilakukan untuk menyelesaikan masalah ini. (Saya yakin bahwa menggunakan kubus *Unifix* akan lebih mudah dipahami sebab kita bisa mengubah bentuk batang puluhan-nya menjadi bentuk batang satuan cukup dengan melepas batang satuan pembentuk batang puluhannya).
- Jelaskan bahwa langkah yang harus dilakukan adalah dengan meminjam satu batang puluhan pada kolom batang puluhan dan menukarnya menjadi sepuluh batang satuan, sehingga hasilnya akan tampak sebagai berikut :

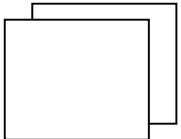
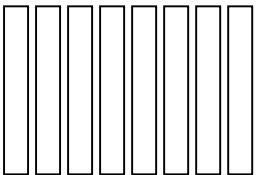
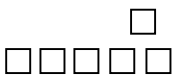
Batang ratusan	Batang puluhan	Batang satuan
		

- Dengan bekal pinjaman ini, sekarang tanyakan kepada siswa apakah pengurangan pada kolom Batang satuan sudah bisa dilakukan, kemudian mintalah siswa untuk melakukannya.
- Selanjutnya alihkan kegiatan pada kolom batang puluhan. Mintalah siswa untuk mengeluarkan 5 batang puluhan dari 3 batang puluhan yang tersisa. Tanyakan kepada mereka apakah hal itu bisa dilakukannya, dan apa yang perlu dilakukan untuk menyelesaikannya.

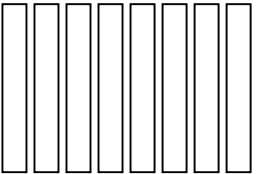
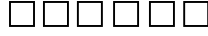
- Mintalah kepada para siswa untuk mencoba menerapkan apa yang akan mereka lakukan, yakni : pinjaman satu batang ratusan untuk ditukar dengan 10 batang puluhan.
- Periksalah apakah sekarang hasilnya akan seperti berikut :

Batang ratusan	Batang puluhan	Batang satuan
		

- Mintalah kepada siswa untuk mengeluarkan 5 batang puluhan dari 13 batang puluhan yang sekarang tersedia sehingga hasilnya akan tampak seperti berikut :

Batang ratusan	Batang puluhan	Batang satuan
		

- Selanjutnya mintalah para siswa untuk mengeluarkan 2 batang ratusan dari 2 batang ratusan yang tersisa, sehingga hasil akhir proses pengurangan ini akan seperti berikut:

Batang ratusan	Batang puluhan	Batang satuan
		

- Akhirnya, mintalah kepada para siswa untuk menentukan hasil pengurangan  $342 - 256$  berdasarkan representasi yang tampak pada lembar nilai tempat tersebut.

Proses pengajaran algoritma pengurangan dengan menggunakan alat peraga ini perlu dilengkapi dengan pengurangan yang dinyatakan dalam bentuk simbol agar para siswa tidak hanya mahir menentukan selisih dua bilangan dengan menggunakan alat peraga saja. Pada akhirnya, yaitu pada taraf pengajaran matematika yang lebih tinggi, mereka akan dituntut untuk mampu menyelesaikan masalah pengurangan seperti ini tanpa bantuan alat peraga sama sekali, bahkan juga tanpa menggunakan kertas dan pensil. Oleh karena itu, algoritma di atas perlu dituliskan urutan-urutannya sebagai berikut:

$$\begin{array}{r} 3 \quad 4 \quad 2 \\ \underline{2 \quad 5 \quad 4} \end{array} -$$

2 – 4 tidak bisa dilakukan, terpaksa pinjam

1 puluhan sehingga bentuknya menjadi sebagai berikut:

$$\begin{array}{r} 3 \\ 3 \quad 4 \quad 10+2 \\ \underline{2 \quad 5 \quad 4} \end{array} -$$

$$\begin{array}{r} 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 3 \quad 12 \\ \underline{2 \quad 5 \quad 4} \end{array} -$$

$$\begin{array}{r} 8 \end{array}$$

3-5 tidak bisa dilakukan. Perlu pinjam 1 ratusan sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3 \quad 10+3 \quad 12 \\ \underline{2 \quad 5 \quad 4} \end{array} -$$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 13 \quad 12 \\ \underline{2 \quad 5 \quad 4} \\ 0 \quad 8 \quad 8 \end{array} -$$

Dengan demikian maka hasil pengurangannya adalah 88 yang berasal dari 8 puluhan dan 8 satuan.

### 5. *Pembentukan Keterampilan Melakukan Pengurangan*

Setelah mempelajari algoritma pengurangan seperti di atas, maka untuk membentuk keterampilan melakukan pengurangan, kegiatan seperti point 4 di atas perlu dilakukan berulang-berulang dengan berbagai variasi peminjaman. Setelah itu, proses pengerjaannya disederhanakan menjadi beberapa proses saja seperti contoh berikut:

$$\begin{array}{r}
 \phantom{4} \phantom{5} 4 \phantom{3} \phantom{7} \phantom{1} 0 \\
 4 \phantom{5} 4 \phantom{3} \phantom{7} \phantom{1} 0 \\
 \hline
 1 \phantom{5} 8 \phantom{3} \phantom{7} \phantom{1} 0 \\
 \hline
 \phantom{4} \phantom{5} 6 \phantom{3} \phantom{7} \phantom{1} 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \phantom{4} \phantom{3} \phantom{4} \phantom{8} \phantom{7} \phantom{1} 0 \\
 4 \phantom{3} \phantom{4} \phantom{8} \phantom{7} \phantom{1} 0 \\
 \hline
 1 \phantom{3} \phantom{4} \phantom{8} \phantom{7} \phantom{1} 0 \\
 \hline
 2 \phantom{3} \phantom{4} \phantom{6} \phantom{7} \phantom{1} 0
 \end{array}$$

## F. PENGAJARAN PENGURANGAN DI KELAS 4-6

Pengajaran pengurangan di kelas 4-6 pada hakikatnya mengikuti pola pengajaran pengurangan di kelas 1-3, hanya saja bilangan cacah yang digunakan di kelas 4-6 lebih besar dari ribuan bahkan bisa lebih dari satu juta. Meskipun usia siswa sudah lebih tua dari siswa kelas 1-3, perkembangan intelektual mereka juga masih dalam taraf operasi kongkret. Oleh karena itu, sebagaimana pengajaran penjumlahan bilangan cacah, maka pengajaran pengurangan bilangan cacah pun masih tetap diperlukan bantuan alat peraga untuk membantu mereka memperoleh pemahaman yang mantap akan konsep dari operasi pengurangan ini.

### *Penguasaan Keterampilan Melakukan Pengurangan*

Agar para siswa dapat menguasai dengan baik pengurangan bilangan cacah dengan bilangan-bilangan yang besar ini, maka yang perlu dilakukan adalah memperbanyak latihan serta menambah variasi soal pengurangan bilangan cacah ini. Di samping itu, penerapan operasi pengurangan bilangan cacah pada masalah-masalah nyata perlu ditambahkan. Soal-soal cerita yang memuat masalah pengurangan



bilangan cacah perlu diperbanyak, dan guru perlu memberikan arahan dengan senantiasa mencoba mengajak siswa untuk ikut serta memikirkan apakah masalah yang diberikan merupakan masalah pengurangan atau bukan. Guru perlu menggali informasi bagaimana siswa bisa mengetahui bahwa suatu masalah merupakan masalah pengurangan atau bukan.

Sebagai contoh perhatikan soal cerita berikut:

Vian mendapat uang saku dari ibunya setiap bulan sebanyak Rp.5000, 00. Dari jumlah tersebut, uang sebesar Rp. 1000, 00 diberikan oleh Vian kepada adiknya, dan Rp 2000, 00 digunakan untuk membeli kue-kue di sekolah. Berapakah uang Tia sekarang?

Untuk mengajarkan masalah di atas, guru perlu menanyakan kepada siswa soal itu mengenai operasi apa? Selanjutnya guru perlu melacak dari mana siswa bisa sampai kepada kesimpulan tersebut. Guru perlu menyelidiki dan membantu siswa menemukan kata-kata atau istilah yang bisa membantu siswa memahami bahwa masalah ini adalah masalah pengurangan.

## **G. PENGAJARAN PERKALIAN DI KELAS 1-3**

### **1. Penanaman Konsep Perkalian**

Sebagaimana pada penanaman konsep penjumlahan dan pengurangan, penanaman konsep perkalian bilangan cacah perlu dilakukan dengan memberikan pengalaman dengan benda-benda kongkret yang sebanyak-banyaknya kepada para siswa. Aktivitas-aktivitas yang menggunakan benda-benda kongkret sebagai sarana belajar, hendaknya mencirikan segala aktivitas pembelajaran untuk menanamkan sesuatu konsep kepada siswa.

Beberapa aktivitas untuk menanamkan konsep perkalian dapat diberikan contohnya serbagai berikut:

#### **Aktivitas 8.**

- Berikan sejumlah kancing baju kepada siswa
- Mintalah kepada para siswa untuk membuat himpunan yang terdiri atas 2 kancing baju.

- Mintalah kepada siswa untuk membuat tiga himpunan lagi yang masing-masing-terdiri atas dua kancing baju.
- Mintalah kepada para siswa untuk mengatur himpunan-himpunan kancing baju tersebut.
- Tanyakan kepada siswa “Berapa kalikah himpunan yang terdiri dari dua kancing baju tersebut digambarkan?”
- Mintalah kepada siswa untuk mengumpulkan semua kancing baju tersebut ke dalam satu himpunan saja.
- Mintalah kepada siswa untuk menentukan banyaknya kancing dalam himpunan gabungan tersebut.
- Berikan penekanan pada siswa bahwa “empat kali himpunan yang terdiri dari dua kancing baju adalah sama dengan himpunan yang terdiri dari 8 kancing baju”.

### **Aktivitas 9.**

- Berikan kepada siswa himpunan dua belas boneka sehingga cukup untuk diberi pakaian yang dibentuk dari tiga macam celana dan empat macam baju.
- Siapkan secukupnya himpunan celana dan himpunan bajunya sehingga semua boneka dapat diberi pakaian yang berbeda-beda tanpa harus membuka pakaian yang sudah dikenakan kepada suatu boneka.
- Mintalah kepada para siswa untuk memakaikan baju dan celana sehingga pakaian boneka yang satu berbeda dengan boneka yang lain.
- Tanyakan kepada para siswa ada berapa macam celana yang dikenakan oleh para boneka tersebut, dan tanyakan pula berapa macam baju yang dikenakan.
- Selanjutnya tanyakan ada berapa macam pakaian yang bisa dibentuk dari tiga macam celana dan empat baju tersebut.(Perlu tanyakan pula alasan mengapa pakaian satu dibedakan dengan yang lainnya).
- Mintalah kepada siswa untuk melakukan hal yang serupa dengan banyaknya macam celana atau bajunya dikurangi atau ditambah. Lakukan sehingga siswa menjadi lebih mantap pemahamannya akan konsep perkalian bilangan cacah dengan cara ini.

## 2. Pengenalan Fakta Dasar Perkalian

Tabel perkalian bilangan cacah perlu dibuat, dan itu akan lebih memberikan pemahaman kepada siswa bila pengisian tabel dilakukan oleh siswa itu sendiri.

### Aktivitas 10.

- Siapkan sebuah tabel kosong untuk perkalian bilangan cacah mulai dari bilangan 0 sampai dengan 9 seperti berikut:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

- Mintalah kepada para siswa untuk mengisi tabel yang kosong tersebut.
- Minta kepada para siswa untuk menemukan pola yang ada pada tabel tersebut (Jangan lupa untuk senantiasa memberikan penguatan kepada setiap usaha untuk menemukan pola, karena hal itu akan memelihara antusias siswa untuk belajar. Jadi, jangan kecewakan siswa dengan tidak menghargai upayanya.) Pola yang dapat ditemukan tentu akan bervariasi, dan guru jangan berharap bahwa siswa akan berpikir seperti dirinya sehingga semua pola dan fakta dasar yang menurut guru perlu dikenali akan dapat ditemukan oleh siswa. Oleh karena itu, guru perlu menjadi katalisator agar siswa mencoba memikirkan pola yang tidak terpikir dalam benak siswa. Namun demikian, sebelum guru bertindak sebagai katalisator, hendaknya para siswa diberi kesempatan terlebih dahulu untuk mengungkapkan segala yang dipikirkannya tanpa bantuan guru.

### 3. *Penguasaan Fakta Dasar Perkalian*

Fakta dasar perkalian bilangan cacah yang telah dikenalkan diatas perlu dikuasai dengan baik sehingga fakta-fakta dasar ini dapat digunakan dengan mudah nantinya dikala mempelajari konsep yang lebih lanjut. Sebagaimana cara menguasai fakta dasar penggunaan bilangan cacah, penguasaan fakta dasar ini bisa dilakukan dengan cara sering mengulang-ulang ingatan siswa terhadap fakta-fakta dasar tersebut. Cara yang dilakukan dapat dilakukan dengan metode “*drill and practice*” dengan memberikan soal-soal fakta dasar tersebut dan dikerjakan secara tertulis dibuku, tetapi dapat pula dengan melakukan permainan (*games*). Permainan dengan domino atau kartu bridge yang sudah dimodifikasi dapat dilakukan untuk menguasai fakta dasar ini. Bahkan permainan akan memberikan suasana yang lebih menyenangkan siswa dalam mempelajari fakta dasar ini. Suasana permainan, tutorial dari teman sejawat pada waktu melakukan permainan, memberikan sumbangan yang sangat besar bagi penguasaan fakta dasar ini. Oleh karena itu, seorang guru perlu membuat atau menyediakan fasilitas permainan matematika agar suasana lebih memungkinkan bagi siswa untuk belajar matematika dengan baik.

### 4. *Algoritma Perkalian*

Sebagaimana pengajaran algoritma penjumlahan dan pengurangan, maka pengajaran algoritma perkalian hendaknya juga diawali dengan pemberian pengalaman melakukan perkalian dengan benda-benda nyata, terutama untuk bilangan-bilangan yang kecil. Aktivitas berikut dapat digunakan untuk mengenalkan algoritma perkalian bilangan cacah.

#### **Aktivitas 11.**

Misalkan kita ingin mengajarkan bagaimana cara menentukan hasil kali  $4 \times 17$ .

- Berikan beberapa tabel nilai tempat kosong kepada para siswa yang dapat digunakan untuk mempresentasikan bilangan cacah seperti berikut:

Ratusan	Puluhan	Satuan

- Mintalah kepada siswa untuk mempresentasikan bilangan 17 kedalam sebuah tabel nilai tempat, sehingga akan tampak tabel nilai tempat sebagai berikut:

Ratusan	Puluhan	Satuan

- Mintalah siswa untuk membuat tiga buah tabel lagi yang masing-masing mempresentasikan bilangan 17.
- Menanyakan kepada para siswa berapa banyak representasi dari bilangan 17 saat ini.
- Mintalah kepada para siswa untuk menggabungkan semua batang satuan dari keempat representasi bilangan 17 tersebut, sehingga pada kolom batang satuan akan tampak bilangan satuan seperti berikut:

Ratusan	Puluhan	Satuan

- Menanyakan kepada siswa aturan banyaknya batang satuan yang diperkenankan berada dalam kolom batang satuan.
- Menanyakan kepada mereka apa yang harus mereka lakukan sehubungan dengan hal itu, dan meminta kepada mereka untuk melakukan sesuaidengan aturan yang telah disepakati.
- Mintalah kepada para siswa untuk mengumpulkan semua batang puluhan berikut batang puluhan hasil simpanan kedalam kolom batang puluhan sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

Ratusan	Puluhan	Satuan

- Mintalah kepada para siswa untuk membaca nama bilangan yang direpresentasikan oleh hasil algoritma tersebut.

## H. PENGAJARAN PERKALIAN DI KELAS 4-6

### 1. *Pengamatan Sifat dan Pola Perkalian*

Di samping penguasaan fakta dasar perkalian, pemahaman akan sifat dan pola perkalian bilangan cacah mempunyai sumbangan yang sangat berarti dalam pembentukan keterampilan berhitung. Pemahaman terhadap akan sifat-sifat dan pola yang ada pada perkalian bilangan-bilangan cacah perlu di perhatikan dengan seksama. Hendaknya sifat ini tidak hanya menjadi suatu pengetahuan yang diingat saja tanpa pemahaman. Oleh karena itu, sebelum mengenalkan sifat-sifat perkalian bilangan cacah, para siswa perlu diajarkan perkalian yang menyusun benda-benda kedalam sejumlah baris yang sama banyak unsurnya. Batang *Cuisenaire* tampaknya dapat digunakan dengan baik untuk mengenalkan perkalian yang sedemikian. Sebagai contoh,  $2 \times 3$  dapat dinyatakan dalam dua baris mempunyai tiga unsur. Hasil kali  $4 \times 2$  dapat dinyatakan dengan dua baris

yang masing-masing dinyatakan dengan empat yang masing-masing baris mempunyai 2 unsur. Dengan menggunakan batang *Cuisenaire*,

Untuk mengenalkan sifat pertukaran, kepada siswa dapat diajarkan hal-hal sebagai berikut:

### **Aktivitas 12.**

- Berikan batang *Cuisenaire* secukupnya kepada siswa sehingga mereka bisa menyatakan hasil kali dari  $3 \times 6$  dan  $6 \times 3$  dalam bentuk baris dan kolom seperti contoh di atas.
- Mintalah kepada siswa untuk menyatakan hasil kali  $3 \times 6$  dengan menggunakan batang *Cuisenaire*.
- Mintalah kepada para siswa untuk menghitung cacah batang *Cuisenaire* yang digunakan untuk menyatakan  $3 \times 6$  tersebut.
- Mintalah kepada para siswa untuk menyatakan hasil kali  $6 \times 3$  dengan menggunakan batang *Cuisenaire*.
- Mintalah kepada para siswa untuk menghitung cacah batang *Cuisenaire* yang digunakan untuk menyatakan  $6 \times 3$  tersebut.
- Mintalah kepada para siswa untuk membandingkan cacah batang *Cuisenaire* yang digunakan untuk menyatakan hasil kali  $3 \times 6$  dan  $6 \times 3$ .
- Mintalah kepada para siswa untuk menduga apakah hal ini berlaku untuk setiap pasang bilangan bulat.
- Mintalah kepada para siswa untuk mencoba membuktikan dugaannya dengan menggunakan pasangan bilangan cacah yang lain.

Setelah para siswa memahami sifat ini, maka tiba waktunya bagi guru untuk mengenalkan nama sifat atau fakta dasar operasi perkalian ini. Guru hendaknya memberikan sedikit penjelasan akan makna dari nama fakta dasar itu sehingga nama tersebut dapat dikaitkan dengan konsepnya yang diharapkan akan dapat meningkatkan pemahaman siswa.

Untuk mengenalkan sifat identitas, dapat dirancang aktivitas belajar sebagai berikut:

### **Aktivitas 13.**

- Mintalah kepada para siswa untuk menyatakan hasil kali  $4 \times 1$  dengan menggunakan batang *Cuisenaire*.

- Mintalah kepada para siswa untuk menyatakan hasil kali  $1 \times 4$  dengan menggunakan batang *Cuisenaire*.
- Mintalah kepada para siswa untuk menghitung cacah atau banyaknya batang *Cuisenaire* yang di perlukan untuk menyatakan hasil kali  $4 \times 1$ .
- Mintalah kepada para siswa untuk menghitung cacah atau banyaknya batang *Cuisenaire* yang diperlukan untuuk menyatakan hasil kali  $1 \times 4$ .

Setelah siswa memahami konsep ini, tiba saatnya bagi guru untuk memberi nama dari sifat atau makna dasar perkalian bilangan cacah ini. Pelibatan siswa secara aktif pada proses pemberian nama dari fakat dasar ini akan lebih bagus, sebab yang sedemikian itu akan mengakibatkan siswa mengkaitkan nama yang baru dipelajarinya itu dengan pengetahuan dan konsep lainnya yang terkait.

Satu fakta dasar lain yang juga sangat penting terutama dalam kaitannya dengan upaya mengajarkan algoritma perkalian dari bilangan-bilangan cacah yang lebih dari 10, misalnya

$17 \times 24$ , adalah sifat penyebaran. Fakta ini menyatakan bahwa didalam perkalian bilangan cacah berlaku  $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ . Untuk itu dapat dilakukan aktivitas-aktivitas sebagai berikut:

#### **Aktivitas 14.**

Misalkan kita ingin menunjukkan bahwa  $3 \times (4 + 2) = (3 \times 4) + (3 \times 2)$ .

- Pertama kita minta untuk menentukan jumlah dari 4 dan 2 dengan menggunakan batang *Cuisenaire* yang ditempatkan pada tabel nilai tempat.
- Selanjutnya kita minta kepada para siswa untuk membuat tiga tabel seperti yang diperoleh dari langkah pertama.
- Mintalah kepada para siswa untuk menggabungkan batang-batang tersebut kedalam satu tabel, dan mintalah kepada mereka untuk menjelaskan apa makna dari penggabungan tersebut.
- Mintalah kepada mereka untuk mengatur batang-batang tersebut sehingga sesuai dengan aturan yang berlaku untuk pengisian batang disetiap kolomnya.



- Mintalah kepada para siswa untuk menyatakan bilangan yang direpresentasikan oleh tabel nilai tempat tersebut.
- Kedua, mintalah kepada para siswa untuk membuat tabel-tabel representasi dari  $3 \times 4$  dan  $3 \times 2$ .
- Mintalah kepada para siswa untuk menggabungkan batang-batang dari kedua tabel ini ke dalam satu tabel saja.
- Mintalah kepada para siswa untuk mengatur kembali batang-batang yang ada dalam tabel tersebut sehingga memenuhi aturan pengisian batang dalam setiap kolomnya.
- Mintalah kepada para siswa untuk membacakan nama bilangan yang direpresentasikan oleh gabungan kedua tabel tersebut.
- Selanjutnya, mintalah kepada para siswa untuk membandingkan bilangan yang diperoleh dari langkah pertama dengan langkah kedua.

Aktivitas ini perlu diteruskan dengan menggunakan bilangan-bilangan lainnya agar para siswa memahami sifat atau fakta dasar ini, dan jika mereka sudah memahaminya maka nama “sifat penyebaran perkalian terhadap penjumlahan” sudah bisa dikenalkan. Sebagaimana biasa, maka sebaiknya guru perlu mengarahkan siswa sehingga penggunaan istilah penyebaran bisa bermakna bagi siswa, bukan hanya sebuah istilah yang harus dihafalkan.

## 2. *Faktor dan Kelipatan*

Sebagaimana dalam setiap kegiatan mengenalkan suatu konsep baru, maka pengenalan akan konsep faktor dan kelipatan hendaknya pula dimulai dengan memberikan pengalaman kongkret dengan menggunakan benda-benda kongkret yang bisa diraba, dipegang, disusun, dan dipindah-pindahkan dari suatu tempat ketempat yang lain. Untuk mengenalkan konsep kelipatan dan faktor, aktivitas yang dapat dilakukan antara lain adalah sebagai berikut:

### **Aktivitas 15.**

- Siapkan sebuah tabel kosong yang diberi tanda sebagai berikut:
- Mintalah kepada para siswa untuk mengisi baris kedua kolom pertama dengan tiga manik-manik.

- Mintalah kepada para siswa untuk melengkapi tabel tersebut sehingga setiap kolomnya terisi dengan manik-manik.
- Mintalah kepada para siswa untuk menuliskan cacah atau banyaknya manik-manik dibawah kolom-kolom tersebut.
- Mintalah kepada para siswa untuk mengulangi lagi kegiatan ini dengan menggunakan manik-manik yang cacahnya berbeda dengan yang semula.

Setelah para siswa mampu mengisi tabel tersebut tanpa ada kesalahan, dan mampu menuliskan barisan bilangan dibawah tabelnya, maka aktivitas ini dapat dilanjutkan dengan meminta para siswa untuk membuat barisan bilangan yang merupakan cacah atau banyaknya manik-manik dalam setiap kolom, tidak hanya terbatas sampai lima kolom sebagaimana dicontohkan diatas, melainkan lebih dari itu. Sesudah hal ini dapat dilakukan siswa dengan benar, maka istilah “kelipatan” sudah bisa dikenalkan. Kemudian, setelah istilah kelipatan ini dikenalkan, kita maminta kepada siswa untuk menuliskan dibukunya masing-masing: kelipatan dari nol, kelipatan dari 1, kelipatan dari 2, kelipatan dari 3, kelipatan dari 4, dan seterusnya.

Untuk mengenalkan konsep faktor, maka aktivitas berikut dapat digunakan.

### **Aktivitas 16.**

- Siapkan papan panel yang cukup besar didepan kelas.
- Siapkan pula sejumlah besar kertas berbentuk bujur sangkar kecil yang bisa ditempelkan dipapan panel tersebut, dan memberitahukan kepada siswa bujursangkar kecil ini mempunyai ukuran satu satuan luas.
- Beri contoh di papan panel tersebut sebuah persegi panjang yang dibentuk dari bujur-sangkar-bujur sangkar kecil tersebut sehingga luas daerahnya sama dengan 12 satuan luas.
- Minta kepada para siswa untuk membentuk persegi panjang lain yang mempunyai luas 12 satuan luas juga.
- Berilah contoh kepada siswa untuk menuliskan lambang bilangan untuk menyatakan luas daerah persegi panjang tersebut.

Mintalah kepada para siswa untuk membuat lambang-lambang bilangan yang tepat untuk persegi panjang-persegi panjang yang lain.

- Mintalah kepada para siswa untuk menuliskan fakta-fakta bilangannya sebagai berikut:  $12 = 4 \times 3 = 6 \times 2 = 2 \times 6 = 3 \times 4$ .
- Mintalah kepada para siswa untuk membuat persegi panjang-persegi panjang yang lain yang mempunyai ukuran luas yang berbeda sesuai dengan keinginan masing-masing.
- Mintalah kepada para siswa untuk menuliskan fakta-fakta bilangan yang bersesuaian dengan persegi panjang yang dibuatnya.

Setelah para siswa mampu menuliskan sebuah bilangan sebagai hasil kali dua bilangan, maka kita sudah bisa mengenal istilah “faktor”. Jika  $12 = 4 \times 3$ , maka 4 dan 3 masing-masing disebut faktor dari 12. Begitu pula 2 dan 6 adalah faktor dari 12, sebab kita menuliskan  $12 = 2 \times 6$  atau  $12 = 6 \times 2$ .

Agar para siswa mempunyai keterampilan yang tinggi dalam menentukan faktor dari suatu bilangan, kita hendaknya senantiasa mengaitkan konsep faktor dan kelipatan serta tidak jarang kita harus mengajak siswa untuk mengingat-ingat faktor dan kelipatan dari bilangan-bilangan cacah. Permainan dengan menggunakan kartu domino atau kartu *bridge* yang dimodifikasi untuk keperluan hafalan faktor dan kelipatan dapat digunakan sebagai salah satu cara untuk meningkatkan keterampilan menentukan kelipatan dan faktor bilangan-bilangan cacah.

## I. PENGAJARAN PEMBAGIAN DI KELAS 1-3

Jika dalam perkalian kita berupaya menentukan hasil kali dari dua bilangan cacah yang telah diketahui, maka dalam pembagian pada dasarnya kita diberikan hasil kali dan salah satu faktornya. Penguasaan akan fakta-fakta dasar perkalian bilangan cacah dapat digunakan oleh guru untuk mengenalkan konsep perkalian ini. Sebagai contoh, jika para siswa sudah menguasai bahwa  $3 \times 4 = 12$ , maka kita bisa membuat sebuah soal seperti berikut: ” Diisi dengan bilangan berapakah tanda ..... berikut agar menjadi pernyataan  $3 \times \dots = 12$  menjadi pernyataan yang bernilai

benar?”. Setelah beberapa contoh diberikan kepada siswa, maka tahap berikutnya para siswa sudah siap dikenalkan dengan konsep pembagian.

### **1. Penanaman Konsep Pembagian**

Ada dua situasi yang bisa digunakan untuk mengenalkan konsep pembagian, yaitu situasi pengukuran dan situasi partisi. Sebagai contoh: “Tersedia delapan butir telur yang akan digoreng untuk disajikan sebagai sarapan para tamu. Setiap kali sajian memerlukan dua butir. Berapa kali sajian yang dapat dilakukan dengan delapan butir telur tersebut?”. Situasi ini adalah situasi pengukuran yang mempunyai ciri sebagai berikut: ukuran dari himpunan awalnya diketahui, dan ukuran dari masing-masing himpunan bagiannya juga diketahui. Permasalahan yang harus diselesaikan dalam situasi ukuran adalah menentukan banyaknya himpunan bagian dari himpunan tersebut. Sementara itu, situasi partisi mempunyai ciri sebagai berikut: ukuran dari simpulan semula diketahui, dan banyaknya himpunan bagiannya diketahui. Permasalahannya adalah menentukan ukuran dari masing-masing himpunan bagiannya. Contohnya adalah sebagai berikut: “Tersedia delapan butir telur yang akan disajikan secara merata untuk sarapan empat orang tamu. Berapa butir telurkah yang diperoleh oleh masing-masing tamu?”.

Sedikitnya satu dari kedua macam situasi ini perlu dikenalkan kepada siswa. Siswa kelas 1-3 perlu diberi kesempatan untuk bersentuhan langsung dengan situasi-situasi yang demikian. Oleh karenanya, guru perlu merancang aktivitas-aktivitas belajar sehingga siswa mampu menghayati proses pembagian, baik dalam situasi pengukuran maupun dalam situasi partisi. Sebagai contoh kita dapat mengenalkan proses pembagian dalam situasi pengukuran sebagai berikut:

#### **Aktivitas 17.**

- Bentuklah kelompok-kelompok siswa, dan mintalah kepada mereka untuk menunjuk seorang anggotanya menjadi pencatat kelompok.
- Berikan kepada masing-masing kelompok tersebut antara 35 sampai dengan 40 biji kacang dan 9 cangkir kertas.

- Sajikan kisah berikut: “Sabeni sedang mempersiapkan sebuah pesta. Dia mempunyai 35 biji kacang, dan setiap cangkir kertasnya diisi dengan 5 butir kacang. Berapa cangkir kertas yang ia perlukan?”.
- Mintalah kepada pencatat kelompok untuk merekam jawaban kelompok dan proses sampai ke jawaban tersebut.
- Mintalah masing-masing kelompok untuk melaporkan jawaban dan menjelaskan prosesnya.
- Ulangi lagi dengan menggunakan banyaknya kacang dan banyaknya cangkir yang berbeda dari semula.

Sementara itu, kita dapat pula memberi kesempatan kepada siswa untuk memperoleh pengalaman nyata melakukan proses pembagian dalam situasi partisi sebagai berikut:

### **Aktivitas 18.**

- Sajikan sebuah kisah sebagai berikut: “Cindi mempunyai 16 kue-kue. Cindi mempunyai tiga orang teman, dan dia akan membagi kue-kue tersebut bersama-sama dengan temannya untuk dimakan diistirahat kedua. Berapa kue-kue yang diperoleh setiap orangnya?”
- Gunakan kue-kue sungguhan sebisa-bisanya, tetapi kalau memang tidak mungkin untuk diadakan, maka potongan gambar kue-kue dapat digunakan sebagai gantinya.
- Diskusikan dengan para siswa bagaimana menentukan jawabannya.
- Ulangi lagi kegiatan ini dengan menggunakan bilangan yang lebih besar atau banyaknya siswa yang terlibat lebih besar.

Aktivitas-aktivitas ini hendaknya ditindak lanjuti dengan mengenalkan bentuk abstraknya. Akan tetapi, pengenalan bentuk yang abstrak ini hendaknya tidak lepas dari pengalaman empirik yang telah dialami siswa sewaktu mereka mengikuti aktivitas-aktivitas diatas. Oleh karena itu, bentuk-bentuk abstraknya hendaknya menggunakan blangan-bilangan yang memang digunakan dalam aktivitas, seperti: “ $35 : 5 = 7$  dan  $16 : 4 = 4$ ”. Di samping itu, lambang bilangan yang ada dalam bentuk abstrak tersebut hendaknya dikuasai betul oleh para siswa. Mereka diharapkan memahami makna dari masing-masing lambang, dengan senantiasa mengaitkan lambang bilangan tersebut dengan situasi yang dialaminya.

Sehingga jika mereka ditanya apa makna lambang “5” dalam “ $35 : 5 = 7$ ”, mereka mampu memberikan penjelasan dengan merujuk kepada aktivitas yang terkait dengan itu. Tentu saja, keserbanekaan aktivitas akan semakin membantu para siswa memahami konsep pembagian ini.

## 2. *Penguasaan Fakta Dasar Pembagian*

Setelah memahami konsep pembagian, para siswa perlu menguasai beberapa fakta dasar pembagian. Hal ini dapat dilakukan dengan banyak berlatih memecahkan masalah pembagian sederhana. Aktivitas yang menggunakan tabel perkalian dapat dipakai untuk meningkatkan penguasaan siswa akan fakta dasar pembagian. Disamping itu, kita dapat memodifikasi kartu domino ataupun kartu *bridge* dengan menuliskan soal-soal tentang fakta dasar pembagian ini ke dalamnya. Kegiatan permainan dan kegiatan latihan yang diarahkan oleh guru dapat digunakan untuk meningkatkan penguasaan siswa akan fakta dasar pembagian bilangan cacah.

## 3. *Algoritma Pembagian*

Sebagaimana operasi-operasi yang lain, pengenalan algoritma pembagian pun hendaknya diawali dengan memberikan pengalaman melakukan pembagian dengan menggunakan benda-benda kongkret. Kita dapat mulai mengenalkan algoritma pembagian sebagai berikut:

### **Aktivitas 19.**

- Bentuk kelompok dengan tiga anggota.
- Siapkan empat buah tabel nilai tempat dan batang *Cuisenaire* secukupnya hingga bisa digunakan untuk menyatakan bilangan 252, serta dapat pula digunakan untuk menukarkan batang ratusan dengan batang puluhan.
- Mintalah kepada para siswa untuk menyatakan 252 dengan menggunakan tabel nilai tempat dan batang *Cuisenaire* tersebut, dan mintalah untuk meletakkannya di tengah-tengah kelompok.
- Mintalah kepada para siswa untuk menyiapkan tabel nilai tempat di depannya masing-masing.

- Mintalah kepada para siswa untuk membagi 2 batang ratusan secara adil kepada tiga orang dalam kelompok itu. Tanyakan kepada para siswa apa yang terjadi, dan apa yang harus mereka lakukan, serta mintalah kepada mereka untuk melakukan apa yang telah mereka katakan. Kita harapkan mereka menukarkan 2 batang ratusan tersebut dengan 20 batang puluhan.
- Mintalah kepada para siswa untuk membagi rata kepada masing-masing anggotanya.
- Bertanyalah kepada para siswa apa yang harus dilakukan terhadap sisa batang puluhan yang ada didepan mereka, dan mintalah kepada mereka untuk melaksanakan apa yang mereka katakan.
- Ulangi lagi kegiatan ini dengan menggunakan bilangan-bilangan yang lain.

## DAFTAR PUSTAKA

- D'Augustine, C. And Smith, W. C (jr). 1992. *Teaching Elementary School Mathematics*. New York, NY: Harper Collins
- Gronlund, N. E. 1982. *Constructing Achievement Test*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall,
- Kennedy, L. M. And Tipps, S. 1994. *Guiding Children's Learning of Mathematics*. Belmont, CA: Wadsworth
- Sutawidjaja, A. Muhsetyo, G., Muchtar, A.K, dan Soewito. 1991/1992. *Pendidikan Matematika 3*. Jakarta: Depdikbud (Proyek Pengembangan PGSD).
- Van De Walle, J. A. 1994. *Elementary School Mathematics: Teaching Developmentally*. New York, NY: Longman



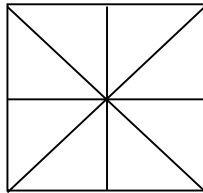


## BAB IV

# PECAHAN DAN PERBANDINGAN

### A. PENGERTIAN PECAHAN

Jika kita membagi suatu daerah persegi menjadi delapan bagian yang sama besar seperti gambar dibawah berikut maka setiap bagian mempunyai luas seperdelapan dari luas daerah keseluruhannya.



Luas bagian yang diarsir adalah seperdelapan dari luas daerah seluruhnya dan ditulis dengan  $\frac{1}{8}$ . Sedangkan luas daerah yang tidak diarsir adalah  $\frac{7}{8}$ . Bentuk dan seperti di atas disebut pecahan.

Secara umum bentuk penulisan  $\frac{a}{b}$  disebut pecahan dengan a dan b bilangan cacah dan  $b \neq 0$ . Dalam hal ini a disebut pembilang dan b. Disebut penyebut.

Secara umum,  $a : b = \frac{a}{b}$  dengan a dan b bilangan cacah dan  $b \neq 0$

Contoh:

1.  $\frac{1}{4}$  dan merupakan pecahan sebab penyebutnya bukan nol
2.  $\frac{8}{0}$  bukan pecahan mengapa?
3. Pembilang dari  $\frac{6}{7}$  adalah 6
4. Penyebut dari  $\frac{3}{5}$  adalah 5
5.  $5 : 9 = \frac{5}{9}$

## B. PECAHAN YANG EKUIVALEN

Ingat kembali bahwa  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$  merupakan pecahan yang ekuivalen, artinya ketiga pecahan tersebut menyatakan bilangan yang sama. Ingat bahwa pecahan yang ekuivalen juga disebut pecahan senilai atau pecahan seharga atau pecahan yang sama.

Contoh.

1. Jika A. Adalah himpunan semua pecahan yang sama dengan  $\frac{1}{3}$   
maka  $A = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \dots \right\}$

## C. PECAHAN PALING SEDERHANA

Pecahan disebut paling sederhana jika pembilang dan penyebut tidak mempunyai faktor persekutuan.

Contoh:

1. Bentuk  $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{5}{7}$ , dan  $\frac{4}{5}$  merupakan pecahan-pecahan paling sederhana.

2. Bentuk paling sederhana dari  $\frac{36}{84}$  adalah  $\frac{3}{7}$  sebab

$$\frac{36}{84} = \frac{36}{84} \cdot \frac{12}{12} = \frac{3}{7}$$

#### D. PECAHAN SENAMA

Pecahan yang jika disebut senama jika mempunyai penyebut yang sama.

Contoh:

1.  $\frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}$  merupakan pecahan senama
2.  $\frac{2}{9}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}$  bukan merupakan pecahan senama

#### E. PECAHAN CAMPURAN

Pecahan campuran adalah pecahan yang pembilangnya lebih besar dari penyebutnya sehingga jika disederhanakan akan menghasilkan bentuk bulat dan pecahan.

Contoh:

1.  $\frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$
2.  $\frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$

## F. PENJUMLAHAN, DAN PENGURANGAN, DAN PEMBAGIAN PECAHAN

### 1. Penjumlahan Pecahan

Contoh

$$\text{Hitunglah } \frac{1}{3} + \frac{2}{9} =$$

Jawab

$$\text{Jadi. } \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3+2}{9} = \frac{5}{9}$$

### 2. Pengurangan Pecahan

Contoh

$$\text{Hitunglah } 2 - \frac{3}{7} =$$

Jawab

$$\text{Jadi. } 2 - \frac{3}{7} = \frac{14}{7} - \frac{3}{7} = \frac{14-3}{7} = \frac{11}{7} = \frac{14}{7}$$

### 3. Perkalian Pecahan

Perhatikan beberapa contoh berikut ini:

Contoh:

$$1. \text{ Hitunglah } \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} =$$

$$\text{Jadi } \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Ternyata } \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1 \times 1}{3 \times 4} = \frac{1}{12}$$

### 4. Pembagian pecahan

Perhatikan beberapa contoh berikut ini,

Contoh:

$$1. \text{ Hitunglah } 2 : \frac{1}{3} =$$

Jawab

Ingat kembali bahwa  $2 : \frac{1}{3}$  sama artinya dengan ada beberapa

$\frac{1}{3}$  an kah pada 2?

Tiap satuan terdiri dari  $3 \frac{1}{3}$  an

2 satuan sama dengan  $6 \frac{1}{3}$  an

Memperhatikan  $2 : \frac{1}{3} = 6$

Jadi  $2 : \frac{1}{3} =$

Ternyata  $2 : \frac{1}{3} = 2 \times \frac{3}{1} = 2 \times 3 = 6$

2. Hitunglah  $\frac{2}{3} : \frac{1}{4} =$

Jawab

$\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$  sama artinya dengan  $\frac{1}{4}$  an kah  $\frac{2}{3}$ ?

Sama cara seperti (1) diperoleh

$\frac{2}{3} : \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{1} = \frac{2 \times 4}{3 \times 1} = \frac{8}{3}$ ?

Perhatikan  $\frac{2}{3} : \frac{1}{4} = \frac{8}{3}$  dengan gambar!

Secara umum jika a b c dan d bilangan bulat dengan  $c \neq 0$  dan

$d \neq 0$  maka  $\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b}$

## G. PECAHAN DESIMAL

Ingat kembali bahwa pecahan-pecahan  $\frac{2}{10}$ ,  $\frac{5}{100}$ ,  $\frac{11}{1000}$ ,  $\frac{74}{10.000}$  dapat ditulis dalam bentuk pecahan desimal sebagai berikut.

$$\frac{2}{10} \text{ ditulis } 0,2$$

$$\frac{5}{100} \text{ ditulis } 0,05$$

$$\frac{11}{1000} \text{ ditulis } 0,011$$

$$\frac{74}{10.000} \text{ ditulis } 0,0074$$

**Pengubahan pecahan biasa kepecahan desimal dan sebaliknya kita dapat mengubah bentuk pecahan menjadi bentuk pecahan desimal, perhatikan contoh berikut:**

Contoh:

1. Tuliskan Bilangan  $\frac{3}{8}$  ke dalam bentuk pecahan desimal

Jawab

$$\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = 0,375$$

Atau dalam bentuk pecahan

$$\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = 0 + (3x\frac{1}{8}) + (7x\frac{1}{100}) + (5x\frac{1}{1000})$$

2. Tuliskan  $6\frac{3}{25}$  ke dalam bentuk pecahan desimal

Jawab.

$$6\frac{3}{25} = 6 + \frac{3}{25} = 6 + \frac{12}{100} = 6 + 0,12$$

Atau dengan bentuk panjang

$$6\frac{3}{25} = 6 + \frac{3}{25} = 6 + \frac{12}{100} = 6 + (1x\frac{1}{10}) + (2x\frac{1}{100}) = 6,12$$

Kita dapat mengubah bentuk pecahan menjadi bentuk desimal dengan cara membagi.

Contoh:

Tuliskan pecahan  $\frac{2}{5}$  dalam bentuk desimal

Jawab

$$\begin{array}{r} 0,4 \\ 5 \overline{)2} \\ \underline{0} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

Jadi  $\frac{2}{5} = 0,4$

Sebaiknya kita juga dapat mengubah bentuk pecahan desimal menjadi bentuk pecahan biasa:

Contoh:

$$0,475 = \frac{475}{1000} = \frac{19}{40}$$

## H. PERSEN

Persen berarti per seratus sebagai ilustrasi 5 persen yang biasanya ditulis 5% berarti  $\frac{5}{100}$ .

Contoh:

1. Bentuk persen dari  $\frac{65}{100} \rightarrow 0,65$  atau 65%



## **Pengubahan Pecahan Biasa ke Persen**

Contoh pengubahan pecahan ke persen.

Contoh:

Tuliskan bentuk persen dari  $\frac{3}{5}$

Jawab

$$\frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\%$$

## **Pengubahan Pecahan Desimal ke Persen**

Mengubah pecahan desimal kepersen

Contoh

$$0,25 = 25\%$$

$$0,25 = \frac{25}{100} = 25\%$$

## DAFTAR PUSTAKA

- D'Augustine, C. And Smith, W. C (jr). 1992. *Teaching Elementary School Mathematics*. New York, NY: Harper Collins
- Kennedy, L. M. And Tipps, S. 1994. *Guiding Children's Learning of Mathematics*. Belmont, CA: Wadsworth
- Sutawidjaja, A. Muhsetyo, G., Muchtar, A.K, dan Soewito. 1991/1992. *Pendidikan Matematika 3*. Jakarta: Depdikbud (Proyek Pengembangan PGSD).
- Sutawidjaja, A. Muhsetyo, G., Muchtar, A.K,. 1991/1992. *Pendidikan Matematika2*. Jakarta: Depdikbud (Proyek Pengembangan PGSD).
- Sa'dijah Cholis. 1998/1999. *Pendidikan Matematika I*. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Proyek Pendidikan Guru Sekolah Dasar.
- Van De Walle, J. A. 1994. *Elementary School Mathematics: Teaching Developmentally*. New York, NY: Longman



# BAB V

## BILANGAN BULAT

Setelah mempelajari modul ini mahasiswa dapat:

1. Memahami konsep dan sifat bilangan bulat negatif
2. Memahami konsep dan sifat bilangan bulat
3. Memahami operasi pada bilangan bulat dan sifat-sifat operasi tersebut
4. Terampil melakukan operasi pada bilangan bulat
5. Menentukan atau memeriksa kebenaran tiap-tiap langkah yang digunakan dalam suatu prosedur operasi pada bilangan bulat.
6. Mengemukakan contoh penggunaan operasi pada bilangan bulat dalam kehidupan sehari-hari.
7. Mengajarkan konsep dan sifat bilangan bulat negatif kepada siswa SD.
8. Mengajarkan konsep dan sifat bilangan bulat kepada Siswa SD.
9. Mengajarkan penjumlahan bilangan bulat kepada siswa SD.
10. Mengajarkan pengurangan bilangan bulat kepada siswa SD.
11. Mengajarkan perkalian bilangan bulat kepada siswa SD.
12. Mengajarkan pembagian bilangan bulat kepada siswa SD.

## A. PENGERTIAN BILANGAN BULAT

Seperti yang telah dikemukakan diatas, hanya dengan memiliki pengetahuan tentang bilangan cacah saja kita belum mampu menjawab masalah baik dalam matematika maupun masalah komputasi dalam kehidupan sehari-hari. Dengan kata lain, himpunan bilangan cacah memiliki beberapa kekurangan sebagai contoh, tidak ada bilangan cacah yang membuat kalimat " $7 + x = 5$ " atau " $6 + y = 0$ " menjadi pernyataan yang bernilai benar. Contoh lain adalah himpunan bilangan cacah tidak tertutup terhadap operasi pengurangan; karena " $3 - 7 = x$ ", misalnya, tidak mempunyai jawab bilangan cacah. Oleh sebab itu, para ahli matematika mengkonstruksikan atau menciptakan bilangan yang dikenal dengan nama *bilangan bulat*.

Bilangan bulat diciptakan dengan cara berikut. Untuk tiap bilangan cacah, misalnya 3, kita ciptakan dua simbol baru  $+3$  dan  $-3$ . Simbol bilangan yang diawali dengan tanda plus kecil yang terletak agak keatas mewakili bilangan *positif*. Misalnya  $+3$  mewakili bilangan "positif 3". Biasanya tanda plus ini dihilangkan dalam menyatakan bilangan positif, sehingga  $+3$  juga berarti 3. Selanjutnya untuk menyatakan suatu bilangan positif kita hanya menulis simbolnya saja tanpa awalan tanda plus.

Simbol bilangan yang diawali dengan tanda minus kecil ditempatkan agak di atas mewakili bilangan *negatif*. Misalnya  $-3$  mewakili bilangan "negatif 3". Perlu diperhatikan bahwa bilangan 0 adalah bukan bilangan positif dan bukan negatif, sehingga dalam menulis simbol bilangan nol kita tidak perlu membubuhi tanda plus atau tanda minus di depannya.

Nampaknya untuk setiap bilangan cacah  $n$  ada bilangan negatif  $n$ . Untuk bilangan cacah ada 1,2 dan 2,3 dan 3,4 ada 4, dan bahkan 0 ada  $-0$  atau  $+0$  dan seterusnya. Dengan demikian untuk masing-masing bilangan cacah positif yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... berturut-turut ada bilangan negatif sebagai pasangannya yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... bilangan terakhir ini disebut bilangan bulat negatif. Bilangan cacah maupun bilangan bulat negatif disebut bilangan bulat. Gabungan dari himpunan ini semua bilangan cacah dan himpunan semua bilangan bulat negatif disebut himpunan semua bilangan cacah dan himpunan semua bilangan bulat negatif disebut himpunan semua bilangan bulat.

*Definisi (1):*

Himpunan  $\{1,2,3,4,5,\dots\}$  disebut bilangan bulat negatif.

*Definisi (2):*

Gabungan himpunan bilangan cacah dan himpunan semua bilangan bulat negatif, yaitu himpunan:  $\{\dots, 5,4,3,2,1,0,1,2,3,4,5,\dots\}$  disebut himpunan bilangan bulat.

*Definisi (3):*

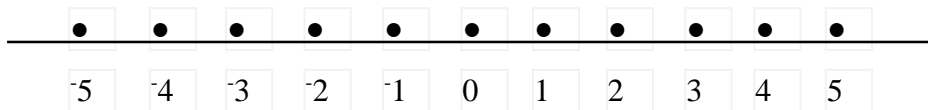
Himpunan bilangan cacah yang bukan 0, yaitu bilangan asli, disebut juga bilangan bulat positif.

Dengan kata lain, himpunan semua bilangan bulat terdiri atas :

1. Bilangan bulat positif atau bilangan asli, yaitu  $1,2,3,4,5,\dots$
2. Bilangan bulat Nol, yaitu 0, dan
3. Bilangan bulat negatif, yaitu :  $\{1,2,3,4,5,\dots\}$

Kadang-kadang bilangan cacah disebut bilangan bulat tak negatif.

Bilangan bulat dapat dinyatakan pada garis bilangan sebagai berikut:



Secara intuitif dapat kita kaji bahwa  $1+^{-}1=^{-}1+^{-}1=0$ ,  $2+^{-}2=^{-}2+2=0$ ,  $3+^{-}3=^{-}3+3=0$ ,  $4+^{-}4=^{-}4+4=0$ ,  $5+^{-}5=^{-}5+5=0,\dots$

Dalam hal ini kita bisa katakan bahwa  $^{-}1$  merupakan lawan atau invers penjumlahan dari 1, dan 1 merupakan lawan dari  $^{-}1$  merupakan lawan dari  $^{-}1$ . Demikian juga  $^{-}2$  adalah lawan dari 2, dan 2 adalah lawan dari  $^{-}2$ , dan seterusnya. Secara umum  $^{-}n$  adalah lawan dari  $n$  dan  $n$  adalah lawan dari  $^{-}n$  untuk setiap bilangan cacah  $n$ . Perhatikan bahwa lawan dari 6 adalah  $^{-}6$ ; lawan dari  $^{-}6$  adalah 6, atau  $^{-}(-6)=6$ . Perlu diperhatikan bahwa lawan suatu bilangan bulat positif adalah bilangan bulat negatif, dan lawan suatu bilangan negatif adalah bilangan bulat positif. Jadi lawan suatu bilangan bulat tidak mesti merupakan bilangan bulat negatif. Memang benar bahwa lawan bilangan bulat 5 adalah bilangan bulat  $^{-}5$  adalah bilangan bulat  $^{-}(-5)$  atau 5, dan 5 adalah bilangan bulat positif.

Sekarang kita perhatikan bilangan bulat 1 dan  $-1$  pada garis bilangan. Kita amati bahwa kedua titik yang menyatakan bilangan bulat ini berjarak sama dari titik yang menyatakan bilangan 0, tetapi terletak pada pihak yang berlawanan dari 0. Hal ini juga berlaku untuk 2 dan  $-2$ , 3 dan  $-3$ , setiap pasangan bilangan bulat dan lawannya.

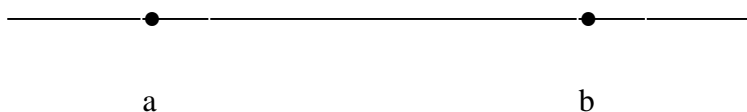
Selisih antara bilangan bulat  $x$  dan 0, tanpa memperhatikan tandanya disebut nilai mutlak bilangan  $x$  dan dinotasikan dengan  $|x|$ . Sebagai contoh, karena pada garis bilangan jarak  $+2$  dari 0 adalah 2 satuan, maka kita tulis  $|2| = 2$ . Selanjutnya, karena jarak  $-2$  dan 0 juga 2 satuan, maka kita tulis bahwa  $|-2| = 2$ . Dengan alasan yang sama diperoleh  $|0| = 0$ . Dengan demikian, nilai mutlak suatu bilangan bulat selalu merupakan bilangan cacah atau bilangan bulat tak negatif. Perhatikan definisi nilai mutlak berikut.  $|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0. \end{cases}$

Seperti halnya pada bilangan cacah, pada bilangan bulat juga dikenal adanya relasi sama dengan dan relasi urutan. Pada relasi sama dengan berlaku sifat-sifat sebagai berikut:

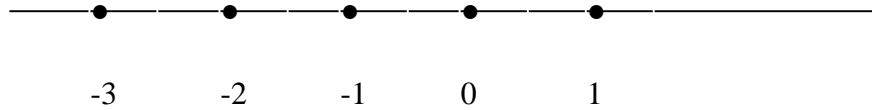
1. Sifat *Refleksif*, yaitu untuk sebarang bilangan bulat  $a$  berlaku  $a = a$  sebagai contoh,  $3 = 3$ , dan  $-5 = -5$ .
2. Sifat *Simetris*, yaitu untuk sebarang bilangan bulat  $a$  dan  $b$  berlaku: jika  $a = b$  maka  $b = a$ . sebagai contoh, jika  $8 = 3 + 5$ , maka  $3 + 5 = 8$ .
3. Sifat *Transitif*, yaitu untuk sebarang bilangan bulat  $a$ ,  $b$  dan  $c$  berlaku: jika  $a = b$ ,  $b = c$ , maka  $a = c$ . sebagai contoh, jika  $9 = 3 + 6$ ,  $3 + 6 = 4 + 5$ , maka  $9 = 4 + 5$ .

*Definisi (4):*

Jika  $a$  dan  $b$  adalah bilangan bulat berlainan dan titik yang mewakili  $a$  terletak di sebelah kanan dari titik yang mewakili  $b$ , maka dikatakan bahwa  $b$  kurang dari  $a$  atau  $a$  lebih dari  $b$ . untuk menuliskan  $b$  kurang dari  $a$ , secara singkat digunakan lambang " $b < a$ ". untuk menuliskan  $a$  lebih dari  $b$ , secara singkat digunakan lambang " $a > b$ ".



Contoh:  $-3 < 0$  sebab titik yang memiliki 0 terletak di sebelah kanan dari titik yang mewakili  $-3$ .



*Definisi (5):*

Jika  $a$  dan  $b$  masing-masing sebarang bilangan bulat, maka  $a < b$  jika dan hanya jika ada sebuah bilangan bulat positif  $c$  sehingga  $a + c = b$ .

Contoh  $3 < 7$  karena ada bilangan bulat positif 4 sehingga  $3 + 4 = 7$

*Definisi (6):*

Jika  $a$  dan  $b$  masing-masing sebarang bilangan bulat, maka  $a$  lebih besar dari  $b$  jika dan hanya jika  $b$  lebih kecil dari  $a$

Contoh  $-1 > -3$  karena  $-3 > -1$  dan  $2 > -4$  karena  $-4 > 2$

Dengan mengamati garis bilangan, dapat dipahami bahwa setiap bilangan bulat positif atau asli lebih dari nol. Contohnya antara lain  $3 > 0$ ,  $7 > 0$ , dan  $15 > 0$ . Demikian juga dapat disimpulkan bahwa setiap bilangan bulat negatif lebih kecil dari nol. Sebagai contoh antara lain:  $-4 > 0$ ,  $-10 < 0$ . Dan  $-27 < 0$ . Kesimpulan lain adalah  $\dots -3 < -2 < -1 < 0$  dan  $0 < 1 < 2 < 3 < \dots$ . Kalau kita kaji secara seksama, sifat refleksi dan simetris tidak berlaku pada relasi urutan bilangan bulat. Hanya sifat transitif yang berlaku, yaitu jika  $a < b$ , dan  $b < c$ , maka  $a < c$  untuk sebarang bilangan bulat  $a, b$ , dan  $c$ . sebagai contoh, karena  $-5 < -2$  dan  $-2 < -3$ , maka  $-5 < -3$ . Salah satu sifat relasi urutan untuk bilangan bulat adalah sifat *trikhotomi*. Sifat ini dapat dinyatakan sebagai berikut. Jika  $a$  dan  $b$  bilangan bulat, maka tepat satu dari tiga hubungan berikut ini benar :  $a = b$ ,  $a < b$ ,  $a > b$ . sebagai contoh, untuk bilangan bulat  $-5$  dan  $3$  maka relasi kedua bilangan tersebut yang bernilai benar adalah  $-5 < 3$ .



## B. OPERASI PADA BILANGAN BULAT

Seperti halnya pada bilangan cacah, ada 4 macam operasi utama yang berlaku pada bilangan bulat. Operasi yang dimaksud adalah penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Keempat operasi pada bilangan bulat ini sangat erat hubungannya dengan operasi pada bilangan cacah. Oleh sebab itu, anda dituntut untuk memahami keempat operasi pada bilangan cacah agar anda dapat, memahami keempat operasi pada bilangan bulat. Berikut akan diuraikan satu persatu keempat operasi tersebut.

### 1. Operasi Penjumlahan

Apabila  $a$  dan  $b$  bilangan cacah, definisi  $a+b$  telah disajikan. Tetapi bila sedikitnya satu dari  $a$  dan  $b$  tersebut merupakan bilangan bulat negatif, maka definisi penjumlahannya adalah sebagai berikut:

*Definisi (7):*

- 1)  $-a+b=-(a+b)$  jika  $a$  dan  $b$  bilangan bulat tak negatif
- 2)  $a+b=a+b$  jika  $a$  dan  $b$  bilangan bulat tak negatif serta  $a>b$
- 3)  $a+b=0$  jika  $a$  dan  $b$  adalah bilangan bulat tak negatif dan  $a=b$
- 4)  $a+b=-(b-a)$  jika  $a$  dan  $b$  adalah bilangan bulat tak negatif dan  $a<b$

Agar lebih jelas, perhatikan contoh berikut:

$$-2+5=-(2+5)=-7$$

$$7+3=7-3=4$$

$$4+4=0 \text{ dan } 2+2=0$$

Penjumlahan bilangan bulat mempunyai beberapa sifat, yaitu:

1. Sifat tertutup  
Jika  $a$  dan  $b$  bilangan bulat, maka  $a + b$  juga bilangan bulat
2. Sifat pertukaran  
Jika  $a$  dan  $b$  bilangan bulat, maka  $a+b=b+a$
3. Sifat pengelompokkan  
Jika  $a, b$ , dan  $c$  bilangan bulat, maka  $(a+b)+c=a+(b+c)$
4. Sifat adanya unsur identitas  
Ada bilangan bulat  $0$  yang bersifat  $a+0=0+a=a$  untuk semua bilangan bulat  $a$ .

5. Sifat adanya invers penjumlahan  
Untuk setiap bilangan bulat  $a$ , ada bilangan bulat  $b$  sehingga  $a+b+b+a=0$  bilangan  $b$  ini disebut invers atau lawan dari  $a$  dan biasanya dinyatakan dengan lambang  $-a$
6. Sifat ketertambahan  
Jika  $a, b, c$  bilangan-bilangan bulat, dan  $a=b$ , maka  $a+c=b+c$
7. Sifat kenselasi  
Jika  $a, b, c$  bilangan-bilangan bulat, dan  $a+c=b+c$ , maka  $a=b$

## 2. Operasi Pengurangan

Pada bilangan cacah, kita mendefinisikan pengurangan dengan menggunakan penjumlahan. Contohnya adalah soal “ $7-2=?$ ”. Soal ini berarti “Bilangan cacah apa yang harus ditambahkan kepada 2 agar diperoleh 7?” bilangan yang dimaksud adalah 5 sebab  $2+3=7$ . Pada bilangan bulat, kita mendefinisikan pengurangan dengan cara yang sama. Misalnya soal “ $8-3=?$ ” sama dengan pertanyaan “Bilangan bulat apa yang harus ditambahkan pada 3 agar diperoleh 8?” bilangan yang dicari adalah 5, sebab  $3+5=8$  contoh lain adalah  $3-5-2$  sebab  $5+(-2)=3$ .

## 3. Operasi Perkalian

Jika sedikitnya satu dari dua bilangan bulat yang dikalikan adalah bilangan bulat negatif, maka didefinisikannya adalah sebagai berikut:

1. *Definisi (9)* : Jika  $a$  dan  $b$  bilangan cacah, maka  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
2. Jika  $a$  dan  $b$  bilangan cacah, maka  $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

Definisi ini dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

- 1) Hasil kali dua bilangan bulat yang bertanda sama adalah bilangan bulat positif,
- 2) Hasil kali dua bilangan bulat yang bertanda sama adalah bilangan bulat positif.

Contohnya adalah sebagai berikut:

$$(-3) \cdot (-2) = 3 \cdot 2 = 6$$

$$5 \cdot (-2) = -(5 \cdot 2) = -10$$

Sifat-sifat perkalian bilangan bulat adalah sebagai berikut.

Misalkan  $a, b, d$  dan  $c$  bilangan bulat.

1) Sifat tertutup

Jika  $a$  dan  $b$  bilangan bulat, maka  $a \cdot b$  juga bilangan bulat

2) Sifat pertukaran

Jika  $a$  dan  $b$  bilangan bulat, maka  $a \cdot b = b \cdot a$

3) Sifat pengelompokan

Jika  $a, b, c$  bilangan bulat, maka  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

4) Sifat adanya unsur identitas

Ada bilangan bulat 1, sehingga untuk setiap bilangan bulat  $a$  berlaku

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Bilangan 1 disebut unsur identitas perkalian

5) Sifat penyebaran perkalian terhadap penjumlahan

Jika  $a, b, c$  bilangan bulat, maka :

$a(b+c) = ab+ac$ , disebut penyebaran kiri dan

$(b+c)a = ba+ca$ , disebut penyebaran kanan

6) Sifat ketergandaan :

Untuk setiap bilangan bulat  $a, b, c$ ; jika  $a=b$ , maka  $a \cdot c = b \cdot c$

7) Sifat kanselasi

Untuk setiap bilangan bulat  $a, b, c$  jika  $ac=bc$  dan  $c \neq 0$ , maka  $a=b$ .

Sifat ini akan sangat berguna pada operasi pembagian

Di samping sifat-sifat yang telah disebutkan diatas, ada beberapa teorema yang terkait dengan operasi perkalian bilangan bulat dan perlu dipahami. Teorema yang dimaksud antara lain sebagai berikut:

1) Jika  $a$  bilangan bulat, maka  $(-1)a = -a$

Bukti :

$$a \cdot 0 = 0 \quad \text{definisi}$$

$$a \cdot 0 = a \cdot (1 + (-1)) \quad \text{invers}$$

$$= a(1) + a(-1) \quad \text{penyebaran}$$

$$= a + (-1)a \quad \text{identitas dan pertukaran}$$

$$\text{Jadi } a + (-1)a = 0 \quad \text{transitif}$$

$$= a + (-a) \quad \text{invers}$$

$$\text{Akhirnya } (-1)a = -a \quad \text{kanselasi}$$

2) Jika  $a$  bilangan bulat, maka  $-(-a)=a$

Bukti :

$-(a)+(-a)=0$	invers
$-(a)+(-a)+a=0+a$	penjumlahan
$-(-a)+((-a)+a)=a$	pengelompokan dan identitas
$-(a-a)+0=a$	invers
$-(a)=a$	identitas

#### 4. Operasi Pembagian

Operasi pembagian pada bilangan bulat didefinisikan sebagai berikut:

*Definisi (10):*

Jika  $a$  dan  $b$  bilangan bulat dengan  $b \neq 0$ , maka  $a$  dibagi  $b$ , ditulis  $a:b$ , ialah bilangan bulat  $x$  yang bersifat  $b \cdot x = a$ .

Untuk menentukan apakah hasil bagi positif atau negatif, kita berpedoman pada definisi perkalian dua bilangan bulat. Oleh karena  $a : b = x$  jika dan hanya jika  $b \cdot x = a$ , maka tanda dari bilangan bulat  $x$  akan ditentukan sedemikian hingga hasil kali  $b \cdot x$  sama dengan  $a$ . Jadi hasil bagi dua bilangan positif atau dua bilangan negatif, jika hasil dibagi itu ada, adalah bilangan bulat positif dan hasil bagi dua bilangan bulat yang berlainan tanda jika hasil bagi itu ada, adalah bilangan bulat negatif. Perhatikan contoh berikut:  $15 : 3 = 5$  sebab  $3 \cdot 5 = 15$ ;  $(-15) : (-3) = 5$ , sebab  $(-3) \cdot 5 = (-15)$ ;  $(-15) : 3 = -5$  sebab  $3 \cdot (-5) = -15$ ; dan  $15 : (-3) = -5$  sebab  $(-3) \cdot (-5) = 15$

Pembagian bilangan bulat tidak bersifat tertutup, sebab tidak ada bilangan bulat  $x$  yang bersifat  $x = (-13) : 4$ . Apabila himpunan semesta (semesta pembicaraan) kita himpunan bilangan bulat, maka  $(-13) : 4$  tidak mempunyai arti

Perhatikan bahwa bilangan 0 mempunyai sifat penting dalam pembagian. Sifat itu adalah sebagai berikut :

- 1) Jika  $a$  bilangan bulat yang bukan 0, maka  $0:a=0$ , jadi  $0:5=0$
- 2) Jika  $a$  bilangan bulat, maka  $a:0$  tidak didefinisikan

Sebagai akibat dari sifat ini, maka 3:0 dan 0:0 semuanya tidak didefinisikan.

## **C. PENGAJARAN BILANGAN BULAT**

Pada dasarnya cara mengajarkan bilangan cacah yang telah dipelajari pada materi yang terdahulu dapat digunakan untuk mengajarkan bilangan bulat, karena bilangan cacah juga merupakan bilangan bulat. Perbedaan cara mengajarkannya hanya khusus tentang bilangan bulat negatif. Untuk mengajarkan operasi pada bilangan bulat negatif atau operasi pada bilangan bulat negatif dan bilangan cacah, kita harus memahami dengan baik sifat tiap-tiap operasi pada himpunan bilangan bulat.

Pada bagian berikut akan disajikan beberapa alternatif cara mengajarkan konsep bilangan bulat dan operasi pada himpunan bilangan bulat. Karena cara mengajarkan operasi pada bilangan cacah telah disajikan pada materi yang lalu, maka yang menjadi perhatian utama kombinasi bilangan bulat negatif dan bilangan cacah.

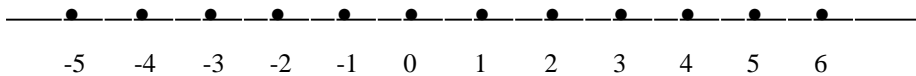
### **1. Penanaman Konsep Bilangan Bulat**

Sebelum mengajarkan konsep bilangan bulat, sebaiknya kita kenalkan dulu konsep bilangan bulat negatif. Konsep bilangan bulat negatif dapat ditanamkan, antara lain, dengan menggunakan istilah lawan dari. Disini kita menggunakan istilah lawan dari masing-masing bilangan asli atau bilangan bulat positif.

Untuk dapat menanamkan konsep bilangan bulat negatif ini sebaiknya pertama-tama guru berceramah dan memberikan contoh. Guru dapat menyampaikan ceramah singkat misalnya sebagai berikut : “Anak-anak, coba perhatikan. Masing-masing bilangan bulat positif mempunyai lawan. Lawan suatu bilangan bulat negatif biasanya dengan menggunakan tanda “-“ didepan lambang bilangan bulat positif tersebut. Sebagai contoh lawan dari 1 adalah -1, lawan dari -2, lawan dari 10 adalah -10, dan lawan dari 15 adalah -15”. Setelah ceramah dan pemberian contoh secukupnya serta pengamatan guru menunjukkan para siswa telah memahami materi,

maka guru dapat melanjutkan dengan kegiatan tanya jawab. Untuk maksud itu guru dapat menyebutkan sebarang bilangan bulat dan meminta para siswa menjawab secara lisan lawan dari bilangan tersebut. Kegiatan itu dapat dilakukan berulang kali. Selanjutnya guru dapat menulis beberapa lambang bilangan bulat di papan tulis dan meminta siswa secara bergantian menuliskan lambang lawan bilangan-bilangan tersebut di papan tulis. Terakhir, jika siswa telah memahami konsep tersebut, maka guru dapat memberikan tugas sebagai latihan untuk dikumpulkan kepada guru. Kegiatan ini ditutup oleh guru dengan menyimpulkan bahwa *himpunan bilangan bulat negatif* adalah  $\{-1,-2,-3,-4,\dots\}$ .

Cara lain yang dapat digunakan oleh guru dalam menanamkan konsep bilangan bulat negatif adalah dengan menggunakan garis bilangan. Untuk maksud itu, pertama-tama guru menggambar suatu garis mendatar di papan tulis, kemudian, guru memili dan menetapkan sebarang titik pada garis tersebut yang mewakili bilangan 0. Setelah itu, disebelah kanan 0 guru mengukur dan memasang beberapa ruas garis yang sama panjang untuk menentukan titik-titik yang mewakili bilangan 1,2,3,4,5,... yaitu bilangan bulat positif. Selanjutnya, di sebelah kiri 0 guru juga mengukur dan memasang beberapa ruas garis yang sama panjangnya dengan ruas garis di sebelah kanan 0 untuk menentukan titik-titik yang mewakili bilangan bulat yang lain. Karena di sebelah kanan 0 adalah bilangan bulat positif, maka bilangan bulat di sebelah kiri 0 ini disebut bilangan bulat negatif dan berturut-turut dilabangkan dengan  $-1,-2,-3,-4,-5,\dots$  dengan demikian gambar garis bilangan bulat positif, nol, dan negatif adalah sebagai berikut.



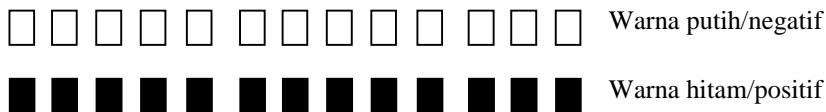
Akhirnya guru dapat membimbing para siswa untuk menyimpulkan bahwa bilangan bulat positif, nol, dan bilangan negatif, disebut bilangan bulat.

## 2. Penanaman Konsep Penjumlahan Bilangan Bulat

Ada beberapa cara untuk menanamkan konsep penjumlahan dua bilangan bulat negatif maupun dua bilangan bulat yang berlainan tanda. Cara yang dimaksud antara lain adalah dengan menggunakan definisi, garis bilangan, dan benda konkret yang dapat diutak-atik. Untuk mempermudah siswa memahami cara-cara tersebut, para siswa harus lebih dahulu menguasai penjumlahan dan pengurangan bilangan cacah.

### a. Menggunakan Benda Konkret

Guru menyiapkan potongan-potongan karton persegi berukuran  $2 \times 2$  cm secukupnya sesuai kebutuhan. Para siswa juga diminta untuk menyiapkan dan membawa ke kelas pada saat pelajaran matematika. Sebagian potongan karton tersebut diberi warna hitam dan sisanya warna putih atau warna lain yang sesuai dengan selera masing-masing guru. Yang penting adalah kedua warna itu berbeda. Karton berwarna hitam dianggap mewakili bilangan bulat negatif, sedang karton yang berwarna putih dianggap mewakili bilangan bulat positif. Beberapa karton persegi tersebut kira-kira berwujud seperti berikut:



Contoh penggunaan adalah sebagai berikut:

Contoh 1. Misalkan kita ingin menghitung jumlah  $(-3) + (-5)$ .

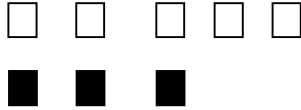
Ambillah 3 karton hitam, kemudian ambil lagi 5 karton hitam. Kumpulkan karton-karton tersebut pada satu wadah dan mintalah untuk mencacah banyaknya seluruh karton hitam yang ada dalam wadah tersebut. Tentu ada 8 karton hitam, karena karton hitam menyatakan bilangan negatif, maka disimpulkan bahwa

$$(-3) + (-5) = -8$$

Contoh 2 hitunglah jumlah  $5 + (-3)$ .

Sekarang mintalah siswa untuk mengambil 5 karton putih dan 3 karton hitam. Mintalah siswa untuk memasangkan masing-masing

karton hitam dengan satu karton putih sehingga kira-kira seperti keadaan berikut.



Sekarang mintalah kepa siswa untuk mengamati dan mencacah karton yang tidak mempunyai pasangan. Tentu saja ada dua karton putih yang tidak mempunyai pasangan. Hal ini dapat disimpulkan bahwa  $5 + (-3) = 2$ .

Contoh 3 misalkan kita ingin mencari jumlah  $4 + (-7)$

Silahkan anda coba!

b. Menggunakan Definisi penjumlahan

Perhatikan definisi penjumlahan bilangan bulat. Untuk mengajarkan penjumlahan bilangan bulat dengan menggunakan definisi, dapat disajikan seperti contoh berikut.

Contoh 1. Misalkan kita ingin menghitung jumlah  $(-3) + (-5)$

Berdasarkan definisi yang diperoleh  $(-3) + (-5) = -(3+5) = -8$

Contoh 2. Hitunglah jumlah  $5 + (-3)$

Berdasarkan definisi, maka  $5 + (-3) = 5 - 3 = 2$

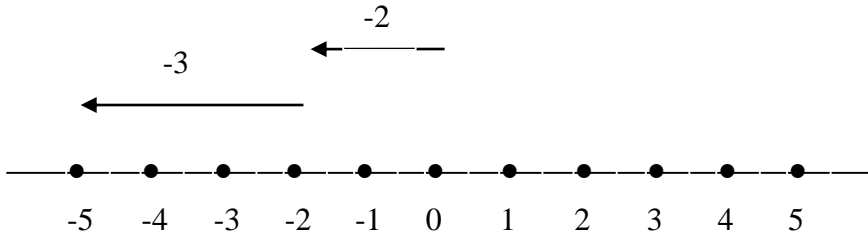
Contoh 3. Misalkan kita ingin mencari jumlah  $4 + (-7)$

Berdasarkan definisi, maka  $4 - (-7) = - (7-4) = - 3$

c. Menggunakan Garis Bilangan

Kita dapat memikirkan penjumlahan bilangan bulat sebagai suatu gerakan atau perpindahan sepanjang suatu garis bilangan. Suatu bilangan bulat positif menggambarkan gerakan ke arah kanan, sedangkan bilangan bulat negatif menggambarkan gerakan ke arah kiri. Titik permulaan selalu dimulai pada titik yang mewakili bilangan 0. Jadi  $(-2) + (-3)$  berarti mulai pada 0, bergerak 2 satuan ke kiri dan dilanjutkan dengan bergerak 3 satuan lagi ke kiri. Gerakan ini berakhir di titik yang mewakili bilangan -5.





### 3. Penanaman Konsep Pengurangan pada Bilangan Bulat

Untuk menanamkan konsep pengurangan pada bilangan bulat kita juga dapat menggunakan persegi panjang yang berwarna hitam dan putih seperti halnya pada penjumlahan bilangan bulat. Pengurangan pada bilangan bulat, sifat  $n+(-n)=0$ , atau mengambil contoh berikut akan mempermudah kita untuk memahami konsep pengurangan pada bilangan bulat.

Contoh 1. Carilah  $(-5)-(-2)$

Sediakan 5 karton hitam yaitu ■■■■■ karena  $(-5)$  dikurangi  $(-2)$  maka ambillah 2 karton hitam dari 5 karton hitam tersebut. Sisanya tinggal 3 karton hitam yaitu ■■■. Jadi  $(-5)-(-2)=-3$

Contoh 2. Carilah  $(-2)-(-5)$

Kita ketahui bahwa  $(-2)$  dapat dinyatakan dengan ■■ atau ■■■■■  
□□□

Karena kita perlu mencari hasil pengurangan  $(-2)-(-5)$ , maka kita ambil 5 karton hitam dari tumpukan karton terakhir. Yaitu tinggal adalah 3 karton putih yang mewakili bilangan 3. Jadi  $(-2)-(-5)=3$

Contoh 3. Carilah  $3-5$

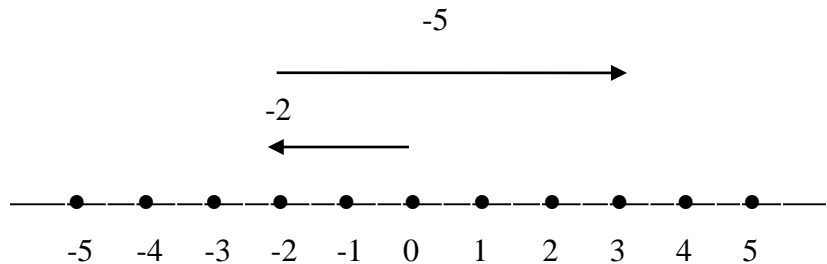
Kita mengetahui bahwa 3 dapat diwakilkan oleh □□□ atau □□□□□  
■■■

Dari tumpukan terakhir ini kita ambil 5 karton putih, dan yang tinggal adalah 2 karton hitam, yang mewakili bilangan  $-2$ . Jadi  $3-5=-2$

Selain cara diatas, kita juga dapat menggunakan definisi atau sifat pengurangan bilangan bulat. Misalkan kita akan menentukan  $8-(-5)$ . Dalam hal ini, berdasarkan definisi,  $8-(-5)=x$  dan hanya jika  $8=(-5)+x$ .

Padahal kita ketahui bahwa  $(-5)+13=8$ . Jadi  $x=13$  atau  $8-(-5)=13$ . Salah satu sifat pengurangan adalah  $a-b=a+(-b)$ . Oleh sebab itu,  $8-(-5)=8+(-5)=8+5=13$ . Jadi  $8-(-5)=13$ .

Menanamkan konsep pengurangan pada bilangan bulat dapat juga dilakukan dengan menggunakan garis bilangan bulat. Penggunaan garis bilangan ini dapat dilakukan dengan memanfaatkan sifat pengurangan bilangan bulat di atas. Sebagai contoh kita akan mencari  $(-2)-(-5)$ . Kita tahu bahwa  $(-2)-(-5)=(-2)+(-(-5))=(-2)+5=3$ . Garis bilangannya adalah sebagai berikut :



#### 4. Penanaman konsep perkalian pada bilangan bulat

Cara yang paling sederhana untuk menanamkan konsep perkalian pada bilangan bulat adalah menggunakan pola atau model. Misalkan kita ingin mencari  $4x(-3)$ .

Caranya adalah sebagai berikut:

$$4 \times 3 = 12$$

$$4 \times 2 = 8$$

$$4 \times 1 = 4$$

$$4 \times (-1) = -4$$

$$4 \times (-2) = -8$$

$$4 \times (-3) = -12$$

Kita dapat mengamati bahwa faktor pertama dalam perkalian itu adalah 4. Faktor kedua dalam perkalian itu makin kecil, yaitu berkurang satu demi satu. Ternyata hasil kali berkurang 4 demi empat. Berdasarkan pola ini maka dapat dipastikan bahwa  $4 \times (-3) = -12$

Tentu saja dengan menggunakan sifat pertukaran perkalian kita dapat memahami bahwa  $-3 \times 4 = 4 \times (-3) = -12$  sekarang bagaimana dengan  $(-3) \times (-4)$ ? Dalam hal ini kita juga dapat menggunakan pola. Perhatikan baik-baik :

$$(-3) \times 3 = -9$$

$$(-3) \times 3 = -6$$

$$(-3) \times 1 = -3$$

$$(-3) \times 0 = 0$$

$$(-3) \times (-1) = 3$$

$$(-3) \times -2 = 6$$

$$(-3) \times (-3) = 9$$

$$(-3) \times (-4) = 12$$

Contoh-contoh ini memberikan ilham bahwa:

- 1) Hasil kali dua bilangan yang berlawanan tanda sama dengan negatif dari hasil kali harga mutlak tersebut, dan
- 2) Hasil kali dua bilangan bulat yang bertanda sama adalah positif dari hasil kali harga mutlak masing-masing bilangan tersebut.

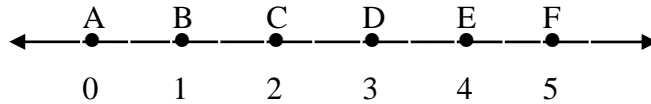
## 5. Penanaman Konsep Pembagian pada bilangan bulat

Penanaman konsep pembagian pada bilangan bulat dapat dilaksanakan dengan menggunakan konsep perkalian bilangan bulat dan definisi pembagian bilangan bulat sebagai contoh :  $8 : (-2) = -4$  karena  $(-2) \times (-4) = 8$ ;  $(-15) : (-5) = 3$  karena  $(-5) \times 3 = -15$ ; dan  $(-6) : 3 = -2$  karena  $3 \times (-2) = -6$ .

## D. BILANGAN BULAT DAN OPERASINYA

Dalam pembicaraan mengenai garis bilangan, dikatakan bahwa titik-titik pada garis bilangan dikorespondensikan dengan bilangan-bilangan cacah. Apabila kita bergerak dari kiri ke kanan, maka bilangan pasangannya makin besar.

Apabila kita mempunyai garis bilangan sebagai berikut :



Maka  $AB=BC=CD= \dots$ , dan titik-titik A,B,C,D,.. . . ,

Dikorespondensikan dengan bilangan-bilangan cacah 0,1, . . . .  
sekarang garis bilangan, tersebut kita pilih titik-titik B',C',D', . . . .  
sebagai berikut :

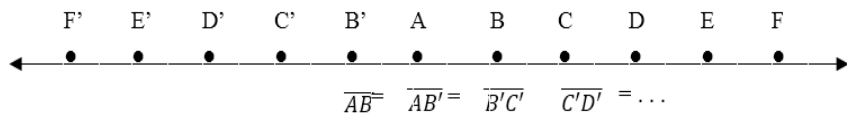
Titik B' dipilih di kiri titik A, sehingga sehingga  $\overline{AB'} = \overline{AB}$

Titik C' dipilih di kiri titik B' sehingga  $\overline{B'C'} = \overline{AB'}$

Titik D' dipilih di kiri titik C', sehingga  $\overline{C'D'} = \overline{B'C'}$

Demikian seterusnya, titik-titik dipilih sehingga tiap ruas garis yang baru sama panjangnya dengan ruas garis  $\overline{AB}$

Garis bilangannya menjadi sebagai berikut :



Dengan demikian terdapatlah :

Titik B terletak pada jarak 1 ruas di kanan titik A, dan titik B' terletak pada jarak 1 ruas di kiri titik A

Titik C terletak pada jarak 2 ruas di kanan titik A, dan

Titik C' terletak jarak 2 ruas di kiri titik A.

Titik D terletak pada jarak 3 ruas di kanan titik A, dan

Titik D' terletak pada jarak 3 ruas di kanan titik A, dan seterusnya, tiap titik di kanan titik A mempunyai pasangan sebuah titik di kiri titik A, yang berjarak sama terhadap titik A.

Selanjutnya titik B' dikorespondensikan dengan bilangan -1. Di baca “negatif satu”, yaitu bilangan yang jika ditambahkan pada 1 menghasilkan 0;

jadi  $1+(-1)=0$ .

C' dikorespondensikan dengan bilangan yang dengan -2, yang dibaca: “negatif dua”, yaitu bilangan yang dengan 2, jumlahnya 0; jadi  $2+(-2)=0$

Titik D' dikorespondesnikkan dengan bilangan -3, yang dibaca “negatif tiga”, yaitu bilangan yang dengan tiga jumlahnya 0; jadi  $3+(-3)=0$ . Demikian seterusnya, titik E'.F', ..., dikorespondesnikkan dengan bilangan-bilangan -4,-5,..., bilangan – bilangan tersebut dengan 4,5,..., jumlahnya 0.

Jadi :

$$4+(-4)=0$$

$$5+(-5)=0, \text{ dan seterusnya}$$

Garis bilangannya menjadi :



Bilangan-bilangan negatif tersebut, yaitu -1,-2,-3,..., disebut **bilangan bulat negatif**.

Jadi himpunan semua bilangan bulat negatif dapat disajikan dengan  $[-1, -2; -3, \dots]$

Bilangan –bilangan asli disebut pula bilangan **bulat positif**, dan sering disajikan dengan  $+1,+2,+3, \dots$

Gabungan dari himpunan semua bilangan bulat positif, himpunan semua bilangan bulat negatif dan himpunan nol, disebut himpunan bilangan bulat.

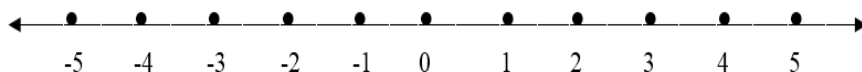
Jadi himpunan semua bilangan bulat adalah :

$$[\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots]$$

Menyajikan himpunan semua bilangan bulat dengan cara tersebut yaitu yang positif diletakan dikanan 0, dan yang negatif di kiri 0, disesuaikan dengan letak numeral-numeralnya paa garis bilangan. Bilangan-bilangan 0,1,2,3, . . . . , yang sudah dikenal sebagai bilangan cacah, disebut pula bilangan bulat positif.

Bilangan bilangan 0,-1,-2,-3, . . . , disebut bilangan bulat tidak positif.

Kita perhatikan garis bilangan berikut :



Terlihatlah bahwa tiap titik di kanan titik 0, dapat dikawankan dengan sebuah titik di kiri titik 0 yang berjarak sama dengan titik 0 tersebut.

Misalnya :

Titik 1 di kanan titik 0, mempunyai kawan titik -1 di kiri titik 0, masing-masing berjarak 1 ruas dari titik 0.

Titik 2 di kanan titik 0, mempunyai kawan titik -2, di kiri titik 0

Titik 3 dan titik -3 berjarak sama dari titik 0, yaitu masing-masing berjarak 3 ruas titik 0.

Sepasang titik yang demikian itu, yaitu berjarak sama dari titik 0, tetapi terletak berlainan pihak dari titik 0, disebut titik-titik yang saling berlawanan terhadap titik 0.

Jadi titik 1 dan titik -1 saling berlawanan terhadap titik 0.

Maksudnya :

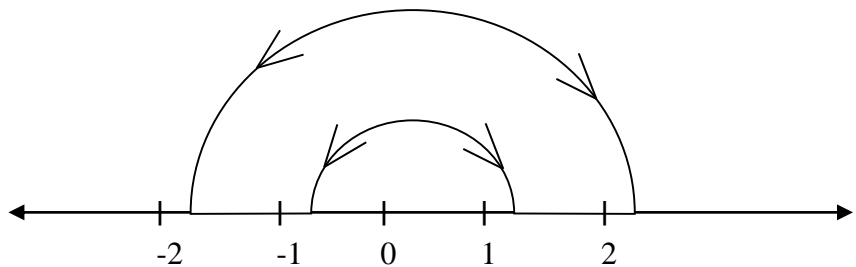
Titik 1 disebut berlawanan dengan titik -1 terhadap titik 0. Dan sebaliknya titik -1 juga disebut berlawanan dengan titik 1 terhadap titik 0.

Demikian pula titik 2 dan titik -2 saling berlawanan terhadap titik 0

Titik 3 dan titik -3 saling berlawanan terhadap titik 0

Titik 0 dikatakan berlawanan dengan titik 0 sendiri.

Hubungan tersebut dapat digambarkan sebagai berikut :



Seperti telah dibicarakan :

$$1+(-1)=0$$

$$2+(-2)=0$$

$$3+(-3)=0$$

$$4+(-4)=0$$

Bilangan – bilangan 1 dan (-1) disebut saling berlawanan atau yang satu invers jumlah dari yang lain.

Maksudnya :

1 adalah lawan atau invers jumlah dari -1, dan -1 adalah lawan atau invers jumlah dari 1.

Demikian pula 2 adalah lawan atau invers jumlah dari -2, dan -2 adalah lawan atau invers jumlah dari 2.

3 mempunyai invers jumlah -3

0 mempunyai invers jumlah 0 sendiri

Jadi tanda “-“ dipergunakan untuk 4 hal, yaitu :

1. Untuk menyatakan pengurangan 2 bilangan, misalnya  $7-2$ , yang dibaca : “7 dikurangi 2”
2. Untuk menyatakan bilangan negatif, misalnya  $-7$ , yang di baca : “negatif tujuh”
3. Untuk menyatakan invers jumlah atau lawan suatu bilangan misalnya : lawan dari 7, ialah  $-7$ ;  
Invers jumlah dari  $-8$  ialah 8;  
Karena tanda “-“ dipergunakan untuk menyatakan lawan atau invers jumlah suatu bilangan, maka invers jumlah atau lawan dari  $-8$  dapat pula ditulis  $-(-8)$ , sehingga terdapat :  $-(-8)=8$ .
4. Untuk menyatakan gerak dengan arah yang berlawanan dengan gerak yang mempunyai arah positif pada garis bilangan; apabila 3 diberi arti bergerak ruas ke kanan, maka  $-3$  mempunyai arti bergerak ruas ke kiri.

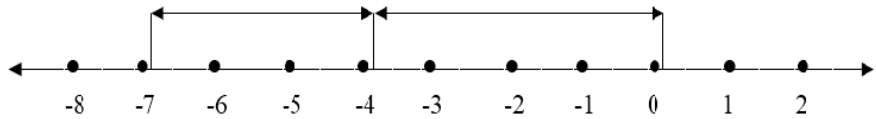
## 1. Penjumlahan

### Penjumlahan 2 bilangan bulat negatif

Andaikan akan dicari jumlah dari  $-4$  dan  $-3$ .

Apabila diperunakan garis bilangan dengan arah ke kanan positif, berarti : dari titik 0 bergerak ke kiri 4 ruas, dilanjutkan bergerak ke kiri lagi 3 ruas.

Gambarnya sebagai berikut :



Ternyata sampai titik  $-7$ .

Jadi :

- 1)  $(-4)+(-3)=-7$
- 2)  $-7$  adalah lawan dari  $7$
- 3)  $7=4+3$
- 4) Jadi  $-7$  adalah lawan dari  $(4+3)$
- 5) Lawan dari  $(4+3)$  adalah  $-(4+3)$
- 6) Jadi  $-7=-(4+3)$

Dari (1) dan (6) di dapat :

$$(-1)+(-3)=--(4+2)$$

Apabila bilangan-bilangannya  $(-a)$  dan  $(-b)$ , maka didapat :

Definisi I

Apabila  $a$  dan  $b$  bilangan-bilangan asli; maka

$$(-a)+(-b)=--(a+b).$$

Penjumlahan bilangan bulat positif dan bilangan bulat negatif.

- a) Andaikan akan dicari jumlah dari  $7$  dan  $(-6)$

Dengan garis bilangan berarti :

Dari titik  $0$  bergerak ke kanan  $7$  ruas, dilanjutkan bergerak ke kiri  $6$  ruas

Gambarnya adalah sebagai berikut :



Ternyata sampai di titik  $1$

Jadi :

$$7+(-6)=7-6$$



Apabila bilangan-bilangannya  $a$  dan  $(-b)$  dengan  $a > b$ , maka terdapatlah :

Definisi II

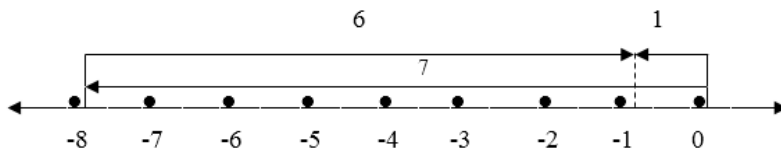
$A + (-b) = a - b$  dengan  $a > b$

- b) Andaikan akan dicari jumlah dari  $(-7)$  dan  $6$ .

Dengan garis bilangan berarti :

Bergerak dari titik  $0$  ke kiri  $7$  ruas, dilanjutkan bergerak ke kanan  $6$  ruas.

Gambarnya adalah sebagai berikut :



Ternyata sampai titik  $(-1)$ .

Jadi :

- 1)  $(-7) + 6 = (-1)$
- 2)  $(-1)$  adalah lawan dari  $1$
- 3)  $7 - 6 = 1$
- 4) Jadi  $(-1)$  adalah lawan dari  $(7 - 6)$
- 5) Lawan dari  $7 - 6$  adalah  $-(7 - 6)$
- 6) Jadi  $-1 = -(7 - 6)$

Dari (1) dan (6), didapat :

$$(-7) + 6 = -(7 - 6).$$

Apabila bilangan-bilangannya  $(-a)$  dan  $b$  dengan  $a > b$ , maka terdapat :

Definisi III.

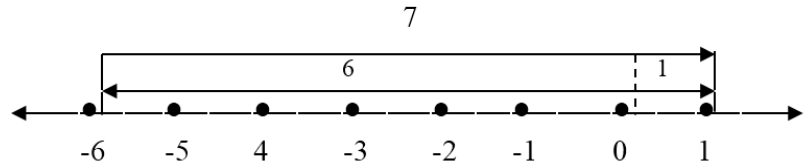
$(-a) + b = -(a - b)$  dengan  $a > b$

- c) Andaikan akan dicari jumlah dari  $(-6)$  dan  $7$ .

Dengan garis bilangan caranya sebagai berikut :

Dari titik  $0$  bergerak ke kiri  $6$  ruas, dilanjutkan bergerak ke kanan  $7$  ruas.

Gambarnya sebagai berikut :



Ternyata sampai di titik 1.

Jadi :

$$(-6)+7=1$$

$$7-6=1$$

Maka :  $(-6)+7=7-6$

Apabila bilangan-bilangan  $(-a)$  dan  $b$ , dengan  $a < b$ , maka terdapatlah :

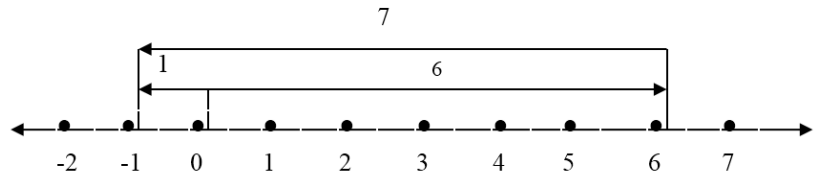
Definisi IV.

$(-a)+b=b-a$  dengan  $a < b$ ,

d) Andaikan akan dicari jumlah dari bilangan 6 dan  $(-7)$ .

Dengan menggunakan garis bilangan adalah sebagai berikut :

Dari titik 0 bergerak ke kanan 6 ruas, dilanjutkan bergerak ke kiri 7 ruas.



Ternyata sampai di titik  $(-1)$

Jadi :

1)  $6+(-7)=-1$

2)  $-1$  adalah lawan dari 1

3)  $1=7-6$

4) Jadi  $(-1)$  adalah lawan dari  $7-6$

5) Lawan dari  $7-6$  adalah  $-(7-6)$

6) Jadi  $(-1)=-(-7-6)$

Dari (1) dan (6) diperoleh

$$6+(-7)=-(-7-6)$$

Apabila bilangan-bilangannya  $a$  dan  $(-b)$ , dengan  $a < b$ , maka terdapat:

Definisi v

**$a + (-b) = -(b - a)$  dengan  $a < b$**

Dengan menggunakan definisi-definisi tersebut, serta sifat komunikatif penjumlahan bilangan-bilangan cacah, dapat dibuktikan bahwa penjumlahan 2 bilangan bulat pun bersifat komunikatif dan pula bersifat asosiatif, yaitu :

**Sifat komunikatif :**

Jika  $a$  dan  $b$  bilangan bulat, maka  $a + b = b + a$

**Sifat asosiatif :**

**Jika  $a, b$  dan  $c$  bilangan bulat, maka  $(a + b) + c = a + (b + c)$ . cobalah anda buktikan !**

## 2. Pengurangan

1. Selisih 2 bilangan bulat didefinisikan pula sebagai bilangan yang jika ditambahkan pada pengurangnya, menghasilkan bilangan-bilangan yang dikurangi.

Dalam bentuk rumus :

**Definisi :**

$a - b$  adalah bilangan bulat  $c$ , sehingga  $a = b + c$ .

( $a$  dan  $b$  bilangan-bilangan bulat).

Jika  $a + (-b)$  menggantikan  $c$  dalam rumus tersebut, maka terdapat :

$$\begin{aligned} A = b + (a + (-b)) &= (b + a) + (-b) \\ &= (a + b) + (-b) \\ &= a + (b + (-b)) \\ &= a + c \\ &= a \end{aligned}$$

Demikian demikian definisi tersebut pula dinyatakan sebagai berikut :

jika  $a$  dan  $b$  bilangan-bilangan bulat, maka :

$$a - b = a + (-b)$$

dari definisi tersebut dapatlah :

- I.  $(-a) - b = (-a) + (-b) = -(a + b)$
- II.  $(-a) - (-b) = (-a) + (-(-b)) = (-a) + b$
- III.  $a - (-b) = a + (-(-b)) = a + b$

### 3. Perkalian

Perkalian 2 bilangan bulat didefinisikan sebagai berikut :

Jika  $a$  dan  $b$  bilangan-bilangan asli, maka :

I.  $(+a) \times (+b) = +(axb)$

II.  $(+a) \times (-b) = -(axb)$

III.  $(-a) \times (+b) = -(axb)$

IV.  $(-a) \times (-b) = +(axb)$

Sifat-sifat yang pokok yang berlaku pada perkalian bilangan-bilangan bulat yaitu:

I. Sifat komutatif, yaitu  $axb = bxa$

II. Sifat asosiatif, yaitu :  $(axb)xc = ax(bxc)$

III. Sifat distributif terhadap penjumlahan, yaitu :

$$ax(b+c) = axb + axc$$

IV. Sifat distributif terhadap pengurangan, yaitu :  $ax(b-c) = axb - axc$

### 4. Pembagian

Seperti halnya pembagian 2 bilangan cacah, pembagian 2 bilangan bulat, dengan pembagi yang bukan 0, didefinisikan pula sebagai bilangan yang dikalikan dengan pembaginya menghasilkan bilangan yang dibagi.

Dalam bentuk rumus :

**Definisi :**

**Jika  $a$  dan  $b$  bilangan-bilangan bulat dan  $b \neq 0$  maka  $a:b$  adalah bilangan bulat  $c$ , sehingga  $a = b \times c$ .**

Dengan definisi tersebut kita dapat menghitung hasil bagi 2 bilangan bulat.

Misalnya, akan dihitung :

a)  $(-6) : 2 =$

b)  $12 - 3 =$

c)  $(-8) : (-2) =$

Dengan menggunakan definisi tadi, terdapatlah :

a)  $(-6) : 2 = c$  sama artinya dengan

$$c \times 2 = (-6)$$

$$(-3) \times 2 = (-6)$$

Jadi  $c = -3$

b)  $12 : -3 = d$  sama artinya dengan

$$d \times (-3) = 12$$

$$(-4) \times (-3) = 12$$

Jadi  $d = -4$

c)  $(-8) : (-2) = e$

$$e \times (-3) = -8$$

$$4 \times (-2) = -8$$

Jadi  $e = 4$

## TUGAS DAN LATIHAN

- Carilah lawan masing-masing bilangan berikut:  
a. 5                      b. -4                      c. 0                      d. -15
- Berilah masing-masing satu contoh untuk menunjukkan bahwa relasi sama pada bilangan bulat bersifat:  
a. Reflektif              b. Simetris              c. Transitif
- Tunjukkan dengan garis bawah bilangan masing-masing pernyataan berikut:  
a.  $-8 < -2$               b.  $-1 < 7$               c.  $0 > 4$               d.  $6 > -2$
- Dengan menggunakan penjumlahan, pengelompokan, invers penjumlahan, dan unsur identitas penjumlahan, buktikan Sifat kanselasi: jika  $a + c = b + c$  maka  $a = b$
- Buktikan bahwa jika  $a$  dan  $b$  bilangan bulat, maka  $a - b = a + (-b)$ .  
Petunjuk: gunakan definisi  $a-b$ , sifat penambahan, pertukaran, penjumlahan, pengelompokan penjumlahan, dan penyebaran.
- Jelaskan apa pengurangan pada bilangan bulat mempunyai sifat tertutup, sifat pertukaran, sifat adanya unsur identitas, dan sifat pengelompokan!
- Tuliskan masing-masing satu contoh bahwa perkalian pada bilangan bulat mempunyai sifat

- a. Tertutup
  - b. Pertukaran
  - c. Pengelompokan
  - d. Penyebaran
  - e. Perkalian
8. Buatlah benda konkret yang mirip karton persegi untuk mengajarkan konsep penjumlahan pada bilangan bulat. Tunjukkan benda tersebut ragaan penggunaannya
9. Hitunglah  $(-4) + 9$  dan  $5 + (-8)$  dengan menggunakan definisi dan menggunakan peragaan pada garis bilangan
10. Gunakan garis bilangan untuk meragakan  $-(-5)$
11. Dengan menggunakan definisi perkalian sebagai penjumlahan berulang, sifat operasi perkalian, atau karton persegi berwarna, ragaanlah perkalian berikut:    a.  $6x(-4)$     b.  $(-5)x7$

## DAFTAR PUSTAKA

- D'Augustine, C. And Smith, W. C (jr). 1992. *Teaching Elementary School Mathematics*. New York, NY: Harper Collins
- Kennedy, L. M. And Tipps, S. 1994. *Guiding Children's Learning of Mathematics*. Belmont, CA: Wadsworth
- Sutawidjaja, A. Muhsetyo, G., Muchtar, A.K, dan Soewito. 1991/1992. *Pendidikan Matematika 3*. Jakarta: Depdikbud (Proyek Pengembangan PGSD).
- Sutawidjaja, A. Muhsetyo, G., Muchtar, A.K., 1991/1992. *Pendidikan Matematika2*. Jakarta: Depdikbud (Proyek Pengembangan PGSD).
- Sa'dijah Cholis. 1998/1999. *Pendidikan Matematika I*. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Proyek Pendidikan Guru Sekolah Dasar.
- Wirasto. &, Hirdjar. . *Matematika I. Jakarta : Depdikbud*.
- Van De Walle, J. A. 1994. *Elementary School Mathematics: Teaching Developmentally*. New York, NY: Longman

# BAB VI

## TEORI BILANGAN

Bab ini membahas tentang keterbagian, FPB, KPK, keprimaan, dan kongruensi. Berbagai bagian yang diuraikan tentu merupakan bahan yang baru sehingga anda perlu berusaha dengan sebaik-baiknya untuk mampu menguasai materi yang dipaparkan.

Dalam bab ini Anda akan mengenal lebih luas tentang keterkaitan antara keterbagian, FPB dan KPK, keprimaan dan kongruensi, serta beberapa penerapan dalam mencari ciri-ciri keterbagian. Setelah menyelesaikan bab ini, anda diharapkan memiliki kemampuan sebagai berikut:

1. Mengetahui sifat-sifat keterbagian
2. Menyebutkan dalil algoritma pembagian
3. Mencari fpb dan kpk dari dua atau lebih bilangan
4. Menjelaskan sifat-sifat fpb dan kpk
5. Menjelaskan dalil algoritma euclides
6. Mencari fpb dengan menggunakan dalil algoritma euclides
7. Membuat daftar bilangan prima
8. Menjelaskan sifat-sifat bilangan prima
9. Menjelaskan teorema dasar aritmatika
10. Menjelaskan pohon faktor dan pembagian berulang untuk membuat pemfaktoran prima
11. Menjelaskan sifat – sifat kongruensi
12. Menjelaskan penerapan kongruensi dalam ciri keterbagian
13. Menjelaskan sistem residu yang lengkap dan tereduksi babo m
14. Mengetahui sifat-sifat fungsi  $\phi$  - euler



Kemampuan tersebut sangat berguna untuk memperdalam dan memperkuat pengetahuan dan wawasan anda sehingga anda dapat melaksanakan tugas di lapangan dengan lebih baik dan kreatif.

Untuk membantu anda menguasai kemampuan di atas, pembahasan bab ini akan disajikan dalam tiga kegiatan belajar sebagai berikut:

## A. KETERBAGIAN

### 1. Sifat – Sifat Keterbagian

Sifat-sifat tentang keterbagian (*Divisibility*) merupakan dasar pengembangan teori bilangan, sehingga sifat keterbagian banyak digunakan dalam uraian-uraian selanjutnya. Sifat keterbagian ini juga merupakan titik pangkal dalam pembahasan kekongruenan.

Jika suatu bilangan bulat dibagi oleh bilangan bulat atau bukan bilangan bulat. Misalnya, jika 30 dibagi 5, maka hasil baginya adalah bilangan bulat 6; tetapi, jika 30 dibagi 4, maka hasil baginya 7,5 adalah bukan bilangan bulat.

#### *Definisi 1*

Suatu bilangan bulat  $b$  adalah habis dibagi oleh suatu bilangan bulat  $a \neq 0$  jika dan hanya jika ada suatu bilangan bulat  $x$  sehingga  $b = ax$ .

Notasi :

$a \mid b$  dibaca membagi  $b$ ,  $b$  habis dibagi  $a$ ,  $a$  faktor  $b$ , atau  $b$  kelipatan  $a$   
 $a \nmid b$  dibaca  $a$  tidak membagi  $b$ ,  $b$  tidak habis dibagi  $a$ ,  $a$  bukan faktor  $b$ , atau  $b$  bukan kelipatan  $a$ .

#### *Contoh 1*

- $4 \mid 12$  sebab ada bilangan bulat 3 sehingga  $12 = 4 \cdot 3$
- $9 \nmid 15$  sebab tidak ada bilangan bulat  $x$  sehingga  $15 = 9x$
- $-7 \mid -42$  sebab ada bilangan bulat 6 sehingga  $-42 = (-7) \cdot 6$
- Faktor-faktor dari 6 adalah 1, -1, 2, -2, 3, 3, 6, dan -6 sebab  $1 \mid 6$ ,  $-1 \mid 6$ ,  $2 \mid 6$ ,  $-2 \mid 6$ ,  $3 \mid 6$ ,  $3 \mid 6$ ,  $-3 \mid 6$ ,  $6 \mid 6$ , dan  $-6 \mid 6$ .

Berdasarkan Definisi 1 diatas, pembagian di dalam  $Z$  (himpunan bilangan bulat) dapat dilakukan tanpa memperluas  $Z$  menjadi  $Q$  (himpunan bilangan rasional), yaitu dengan menggunakan sifat :

Jika  $a, b \in Z$  dan  $ab = 0$ , maka  $a = 0$  atau  $b = 0$

Sifat ini memungkinkan dilakukan penghapusan faktor, misalnya :

Jika  $a, b \in Z$  dan  $7a = 7b$ , maka  $7a - 7b = 0$ ,  $7(a-b) = 0$

$7 \neq 0$ , maka  $a - b = 0$ , atau  $a = b$

Jadi, persamaan  $7a = 7b$  menjadi  $a = b$  tidak diperoleh dari mengalihkan

ruas kiri dan ruas kanan dengan bukan bilangan bulat  $\frac{1}{7}$ .

Selanjutnya, pernyataan  $a | b$  sudah mempunyai makna  $a \neq 0$ , meskipun  $a \neq 0$  tidak ditulis.

Beberapa sifat dasar adalah :

- $1|a$  untuk setiap  $a \in Z$  karena ada  $a \in Z$  sehingga  $a = 1.a$
- $a|a$  untuk setiap  $a \in Z$  dan  $a \neq 0$  karena  $1 \in Z$  sehingga  $a = a.1$
- $a | 0$  untuk setiap  $a \in Z$  dan  $a \neq 0$  karena ada  $0 \in Z$  sehingga  $0 = a.0$
- jika  $a | b$ ,  $a \neq 0$ , maka kemungkinan hubungan antara  $a$  dan  $b$  adalah  $a < b$ ,  $a = b$ , atau  $a > b$ .

Contoh :

- $1|2$ ,  $1|4$ ,  $1|-10$  adalah pernyataan-pernyataan yang benar
- $4|0$ ,  $12|0$ ,  $-3|0$  adalah pernyataan-pernyataan yang benar
- $2|2$ ,  $4|4$ ,  $-7|-7$  adalah pernyataan-pernyataan yang benar
- $3+6$ ,  $3|3$ ,  $3|-3$  adalah pernyataan-pernyataan yang benar, dimana  $3 < 6$ ,  $3 + 3$ , dan  $3 > -3$ .

Uraian berikutnya adalah dalil-dalil tentang keterbagian.

### *Dalil 1*

Jika  $a, b \in Z$  dan  $a|bc$  untuk setiap  $c \in Z$ .

**Bukti**

Diketahui  $a|b$ , maka sesuai dengan Definisi 1, ada suatu  $x \in Z$  sehingga  $b = ax$ , maka diperoleh  $bc = a \times c$  atau  $bc = a(cx)$  untuk setiap  $c \in Z$ .

Ini berarti ada  $y = cx \in Z$  sehingga  $bc = ay$

Jadi,  $a|bc$

#### *Dalil 2*

Jika  $a, b, c \in Z$ ,  $a|b$ , dan  $b|c$ , maka  $a|c$

#### Bukti

$a|b$ , maka sesuai dengan Definisi 1, ada suatu  $x \in Z$  sehingga  $b = ax$

$b|c$ , maka sesuai dengan Definisi 1, ada suatu  $y \in Z$  sehingga  $c = by$  dan  $b = ax$ , maka  $c = (ax)y = a(xy)$ .

Dengan demikian terdapat suatu  $xy \in Z$  sehingga  $c = a(xy)$ .

Jadi  $a|c$ .

#### *Dalil 3*

Jika  $a, b \in Z$ ,  $a|b$  dan  $b|a$ , maka  $a = b$  atau  $a = -b$ .

#### Bukti

Diketahui  $a|b$  dan  $b|a$ , maka sesuai dengan Definisi 1, ada  $x, y \in Z$  sehingga  $b = ax$  dan  $a = by$ .

$a = by$  dan  $b = ax$ , maka  $a = (ax)y = a(xy)$

$a = a(xy)$ , maka  $a - a(xy) = 0$  atau  $a(1-xy) = 0$

$a \neq 0$  dan  $a(1-xy) = 0$ , maka  $1-xy = 0$ , atau  $xy = 1$

$x, y \in Z$  dan  $xy = 1$ , maka  $x = y = 1$  atau  $x = y = -1$

jika  $x = y = 1$ , maka  $a = b$ ; jika  $x = y = -1$ , maka  $a = -b$  jadi :  $a = b$  atau  $a = -b$ .

#### *Dalil 4*

Jika  $a, b \in Z$ ,  $a|b$ ,  $b|a$ ,  $a > 0$ , dan  $b > 0$ , maka  $a = b$

#### Bukti

Diketahui  $a|b$  dan  $b|a$ , maka sesuai dengan Definisi 1, ada  $x, y \in Z$  sehingga  $b = ax$  dan  $a = by$

$b = ax$ ,  $a = by$ , dan diketahui  $a, b, > 0$ , maka  $x > 0$  dan  $y > 0$  sesuai dengan Dalil 3,  $xy = 1$

$x = y = 1$ ,  $a = by$ , dan  $b = ax$ , maka  $a = b$  dan  $b = a$  jadi:  $a = b$

#### *Dalil 5*

Jika  $a, b \in Z$ ,  $a|b$  dan  $a|c$ , maka  $a|b + c$  dan  $a|b - c$

**Bukti**

Diketahui  $a|b$  dan  $a|c$ , maka sesuai dengan Definisi 1, ada  $x, y \in \mathbb{Z}$  sehingga  $b = ax$  dan  $c = ay$

$b = ax$  dan  $c = ay$ , maka :

$$b + c = ax + ay = a(x + y)$$

$$b - c = ax - ay = a(x - y)$$

$x, y \in \mathbb{Z}$ , maka sesuai dengan sifat ketertutupan operasi penjumlahan dan pengurangan di dalam  $\mathbb{Z}$ ,  $(x + y) \in \mathbb{Z}$  dan  $(x - y) \in \mathbb{Z}$

dengan demikian ada  $(x + y), (x - y) \in \mathbb{Z}$  sehingga

$$b + c = a(x + y), \text{ dan } b - c = a(x - y)$$

Jadi :  $a|b + c$  dan  $a|b - c$

**Dalil 6**

Jika  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $a|b$  dan  $a|c$ , maka menurut dalil 1,  $a|bc$  dan  $a|cy$  untuk semua  $x, y \in \mathbb{Z}$

$a|bx$  dan  $a|cy$ , maka menurut dalil 5,  $a|bx + cy$  untuk semua  $x, y \in \mathbb{Z}$

jadi :  $a|bx + cy$  untuk semua  $x, y \in \mathbb{Z}$

**Dalil 7**

Jika  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a|b$ , maka  $a \leq b$

**Bukti**

Diketahui  $a|b$ , maka menurut Definisi a, ada  $x \in \mathbb{Z}$  sehingga  $b = ax$  dan diketahui  $a, b > 0$ , maka  $x > 0$

$x \in \mathbb{Z}$  dan  $x > 0$ , maka kemungkinan nilai-nilai  $x$  adalah 1, 2, 3, ..., yaitu  $x = 1$  atau  $x > 1$

$x = 1$  atau  $x > 1$  dan  $b = ax$ , maka  $b > a$

jadi :  $a \leq b$

**Dalil 8**

$a|b$  jika dan hanya jika  $ma|mb$  untuk semua  $m \in \mathbb{Z}$  dan  $m \neq 0$

**Bukti :**

1. Diketahui  $a|b$ , maka menurut Definisi 1, ada suatu  $x \in \mathbb{Z}$  sehingga  $b = ax \Leftrightarrow mb = m(ax) = m(ax)x$  untuk suatu  $x \in \mathbb{Z}$ .

Jadi :  $ma|mb$

2. Diketahui  $ma|mb$ , maka menurut Definisi 1, ada suatu  $x \in \mathbb{Z}$  sehingga  $mb = (ma)x = m(ax) \Leftrightarrow mb - m(ax) = 0$ , atau  $m(b - ax) = 0$

$m \neq 0$  dan  $m(b - ax) = 0$ , maka  $b - ax = 0$ , atau  $b = ax$  untuk suatu  $x \in \mathbb{Z}$ .

Jadi :  $a|b$

### Dalil 9

Jika  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $a|b$  dan  $a|b + c$ , maka  $a|c$

### Bukti

Diketahui  $a|b$ , maka menurut Definisi 1, ada suatu  $x \in \mathbb{Z}$  sehingga  $b = ax$

Diketahui  $a|b + c$ , maka menurut Definisi 1, ada suatu  $y \in \mathbb{Z}$  sehingga  $b + c = ay$ , berarti  $c = ay - b$ .

$c = ay - b$  dan  $b = ax$ , maka  $c = ay - ax = a(y - x)$

$x \in \mathbb{Z}$  dan  $y \in \mathbb{Z}$ , maka menurut sifat tertutupan operasi pengurangan bilangan bulat,  $(y - x) \in \mathbb{Z}$ . ternyata ada suatu  $(y - x) \in \mathbb{Z}$  sehingga  $c = a(y - x)$

jadi :  $a|b$

Uraian berikutnya membahas tentang algoritma pembagian

Algoritma pembagian merupakan langkah sistematis untuk melaksanakan pembagian sehingga diperoleh hasil pembagian dan sisa pembagian yang memenuhi hubungan tertentu.

Peragaan berikut tentang hubungan antara  $a, b, \in \mathbb{Z}$  dan  $a > 0$  jika  $b$  dinyatakan dalam  $a$ .

b	a	$b = q \times a + r$
27	5	$27 = 5 \times 5 + 2$
34	7	$34 = 4 \times 7 + 6$
46	8	$46 = 5 \times 8 + 6$
-85	9	$-85 = (-10) \times 9 + 5$
-103	11	$-103 = (-10) \times 11 + 7$

Keadaan di atas menunjukkan bahwa jika  $a, b \in \mathbb{Z}$  dan  $a > 0$ , maka ada  $q, r \in \mathbb{Z}$  sehingga  $b = qa + r$  dengan  $0 \leq r < a$ . fakta-fakta tentang hubungan  $a, b, q$ , dan  $r$  di atas merupakan penerapan Dalil Algoritma Pembagian.

*Dalil 10 (Dalil Algoritma Pembagian)*

Jika  $a, b \in \mathbb{Z}$  dan  $a > 0$ , maka ada bilangan-bilangan yang masing-masing tunggal sehingga  $b = qa + r, 0 \leq r < a$ .

Dari dalil 10 diatas, jika  $a|b$ , maka  $b = qa + 0$ , berarti  $r = 0$  jika  $a|b$ , maka  $r = 0$ , yaitu  $0 < r < a$ . supaya lebih mudah dalam memahami dan mengikuti alur pikir dalam langkah-langkah pembuktian simaklah dengan cermat uraian berikut:

Diketahui dua bulangan bulat 4 dan 7 dengan  $4 \nmid 7$ , maka dapat dibuat suatu barisan aritmetika  $(7 - 4n)$  dengan  $n \in \mathbb{Z}$  yaitu :

$$\text{untuk } n = 5, \quad 7 - 4n = 7 - 20 = -13$$

$$\text{untuk } n = 4, \quad 7 - 4n = 7 - 16 = -9$$

$$\text{untuk } n = 3, \quad 7 - 4n = 7 - 12 = -5$$

$$\text{untuk } n = 2, \quad 7 - 4n = 7 - 8 = -1$$

$$\text{untuk } n = 1, \quad 7 - 4n = 7 - 4 = 3$$

$$\text{untuk } n = 0, \quad 7 - 4n = 7 - 0 = 7$$

$$\text{untuk } n = -1, \quad 7 - 4(n) = 7 + 4 = 11$$

sehingga diperoleh barisan bilangan :

$$\dots, -13, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \dots$$

Barisan bilangan di atas mempunyai suku-suku yang negatif dan suku-suku yang tidak negatif.

Misalkan  $S$  adalah himpunan bilangan suku-suku barisan yang tidak negatif, yaitu :

$$S = \{3, 7, 11, \dots\}$$

$$S = \{7 - 4n | n \in \mathbb{Z}, 7 - 4n \geq 0\}$$

Karena  $S \subset \mathbb{N}$  dan  $\mathbb{N}$  adalah himpunan yang terurut rapi (Well Ordeed Set),  $S$  mempunyai unsur terkecil, yaitu 3.

$3 \in S$ , maka 3 dapat dinyatakan sebagai  $(7 - 4n)$  dengan  $n = 1$ , yaitu  $3 = 7 - (1 \cdot 4)$ , sehingga

$$7 = 1 \cdot 4 + 3 \text{ dengan } 0 \leq 3 < 4$$

$$7 = q \cdot 4 + r \text{ dengan } q = 1, r = 3, \text{ dan } 0 \leq r < 4$$

Jadi : dari  $4, 7 \in \mathbb{Z}$  ada  $q, r \in \mathbb{Z}$  sehingga  $7 = q \cdot 4 + r, 0 \leq r < 4$

## Bukti dalil 10

### 1. Menunjukkan keujudan hubungan $b = qa + r$

$a, b \in \mathbb{Z}$ , maka dapat dibentuk suatu barisan aritmetika  $(b - na)$  dengan  $n \in \mathbb{Z}$ , yaitu ...  $b - 3a, b - 2a, b, b + a, b + 2a, b + 3a$  .....

Misalnya  $S$  adalah himpunan bilangan suku-suku barisan yang tidak negatif yaitu :

$$S = \{b - na \mid n \in \mathbb{Z}, b - na \geq 0\}$$

maka menurut prinsip urutan rapi (Well Ordering Principle),  $S$  mempunyai unsur terkecil  $r$ .

Karena  $r \in S$ , maka  $r$  dapat dinyatakan sebagai  $r = b - qa$  dengan  $q \in \mathbb{Z}$ , berarti  $b = qa + r$ .

### 2. Menunjukkan $0 \leq r < a$

Anggaphlah tidak benar bahwa  $0 \leq r < a$

( $r$  tidak mungkin negatif sebab  $r \in S$ )

$r \geq 0$ , maka  $r - a \geq 0$

$r = b - qa$ , maka  $r - a = (b - qa) - a = b - (q + 1)a$

$r - a \geq 0$  dan  $r - a$  mempunyai bentuk  $(b - na)$  maka  $(r - a) \in S$

Diketahui  $a > 0$ , maka  $r - a < r$ , sehingga  $(r - a)$  merupakan unsur  $S$  yang lebih kecil dari  $r$ .

Hal ini bertentangan dengan  $r$  sebagai unsur kecil  $S$ .

Jadi :  $0 \leq r < a$

### 3. Menunjukkan ketunggalan $q$ dan $r$

Misalkan  $a$  dan  $r$  tidak tunggal, yaitu ada  $q_1, q_2, r_1, r_2, \in \mathbb{Z}, q_1 \neq q_2$  dan  $r_1 \neq r_2$  yang memenuhi hubungan :

$$b = q_1a + r_1, 0 \leq r_1 < a$$

$$b = q_2a + r_2, 0 \leq r_2 < a$$

Dengan demikian dapat ditentukan bahwa :

$$q_1a + r_1 = q_2a + r_2, r_1 - r_2 = a(q_2 - q_1), \text{ yaitu } a \mid (r_1 - r_2).$$

$r_1 \neq r_2$ , misalkan  $r_1 > r_2$ , maka dari  $0 \leq r_1 < a$  dan  $0 \leq r_2 < a$ , dapat dicari  $(r_1 - r_2) < a$  (untuk  $r_1 < a$  dan  $r_2 = 0$ ) dan  $r_1 - r_2 > -a$  (untuk  $r_1 = 0$  dan  $r_2 < a$ ), sehingga  $-a < (r_1 - r_2) < a$ .

Keadaan  $-a < (r_1 - r_2) < a$  dapat dipisah menjadi  $0 < (r_1 - r_2) < a, -a < r_1 - r_2 < 0$ , dan  $r_1 - r_2 = 0$ .

a.  $0 < (r_1 - r_2) < a$ , berarti  $a > (r_1 - r_2)$

$a > 0$ ,  $r_1 - r_2 > 0$ , dan  $a > r_1 - r_2$ , maka  $\nmid r_1 - r_2$ , bertentangan dengan keadaan \*, yaitu  $a \mid r_1 - r_2$ .

Jadi tidak mungkin  $0 < (r_1 - r_2) < a$

b.  $-a < (r_1 - r_2) < 0$ , berarti  $0 < (r_1 - r_2) < a$

$a > 0$ ,  $r_2 - r_1 > 0$ , dan  $a > r_2 - r_1$  maka  $a \nmid r_2 - r_1$ , berarti pula  $a \nmid r_1 - r_2$  bertentangan dengan keadaan\*, yaitu  $a \mid r_1 - r_2$ .

Jadi tidak mungkin  $-a < (r_1 - r_2) < 0$

c.  $r_1 - r_2 = 0$ , dan  $a > 0$ , maka  $a \mid r_1 - r_2$  tidak bertentangan dengan keadaan \*.

Jadi  $r_1 - r_2 = 0$  atau  $r_1 = r_2$

Jadi  $r_1 - r_2 = 0$ , atau  $r_1 = r_2$

$r_1 - r_2 = 0$ , atau  $r_1 - r_2 = a(q_1 - q_2)$ , maka  $a(q_2 - q_1) = 0$

$a > 0$  dan  $a(q_2 - q_1) = 0$ , maka  $q_2 - q_1 = 0$ , berarti  $q_1 = q_2$

Jadi  $r_1 = r_2$  dan  $q_1 = q_2$  yaitu  $q$  dan  $r$  masing-masing adalah tunggal.

## Definisi 2

Jika  $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$ ,  $b = aq + r$ , dan  $0 \leq r < a$ , maka  $b$  disebut bilangan yang dibagi (dividend),  $a$  disebut bilangan pembagi (divisor),  $q$  disebut bilangan hasil bagi (quotient) dan  $r$  disebut bilangan sisa pembagian (remainder).

Dalil Algoritma Pembagian menjamin keujudan (eksistensi) dari bilangan hasil bagi dan sisa pembagian dari pembagian dari pembagian dua bilangan bulat.

Jika  $b$  adalah sebarang bilangan bulat dan  $a = 2$ , maka menurut Dalil Algoritma Pembagian dapat dinyatakan bahwa :

$$b = 2q + r, 0 \leq r < 2$$

$$0 \leq r < 2, \text{ maka } r = 0 \text{ atau } r = 1$$

Untuk  $r = 0$ ,  $b = 2q + 0 = 2q$

$b = 2q$  disebut bilangan bulat genap (even integer)

Untuk  $r = 1$ ,  $b = 2q + 1$

$b = 2q + 1$  disebut bilangan bulat ganjil atau gasal (*old integer*)

Dengan demikian dapat ditentukan bahwa setiap bilangan bulat merupakan bilangan bulat genap (dengan bentuk  $b = 2q$ ) atau merupakan bilangan bulat gasal (dengan bentuk  $b = 2q + 1$ ).



Dengan jalan yang sama, jika  $a = 3, 4, 5,$  dan  $6,$  maka setiap bilangan bulat  $b$  dapat dinyatakan sebagai :

salah satu dari bentuk  $3q, 3q + 1,$  atau  $3q + 2$

salah satu dari bentuk  $4q, 4q + 1, 4q + 2$  atau  $4q + 3$

salah satu dari bentuk  $5q, 5q + 1, 5q + 2, 5q + 3,$  atau  $5q + 4$

salah satu dari bentuk  $6q, 6q + 1, 6q + 2, 6q + 3, 6q + 4,$  atau  $6q + 5$

Di sinilah sesungguhnya letak dari konsep algoritma pembagian, suatu konsep mendasar untuk mengelompokkan, memilih, atau mengklasifikasikan semua bilangan bulat menjadi  $n$  kelompok dengan  $n = 2, 3, 4, 5, \dots$

Contoh 3.

1. Bilangan-bilangan bulat genap  $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$  selalu dapat ditulis menjadi  $2 \cdot 0, \pm 2 \cdot 1, \pm 2 \cdot 2, \dots,$  yaitu bentuk  $2q$  dengan  $q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$  atau  $q \in \mathbb{Z}.$

Bilangan-bilangan bulat ganjil  $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots$  selalu dapat ditulis menjadi  $2 \cdot 0 + 1 \cdot 2(-1) + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2(-2) + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2(-3) + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2(-4) + 1.$

2. Buktikan  $2|n^3 - n$  untuk sebarang  $n \in \mathbb{Z}$

Bukti : menurut dalil algoritma pembagian, setiap bilangan bulat  $n$  dapat dinyatakan sebagai  $n = 2q$  atau  $n = 2q + 1$

Jika  $n = 2q,$  maka :

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) = 2q(2q-1)(2q+1)$$

$n^3 - n$  mempunyai faktor 2, sehingga  $2|n^3 - n$

Jika  $n = 2q + 1,$  maka

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$$

$$= (2q+1)(2q+1-1)(2q+1+1)$$

$$= (2q+1)(2q)(2q+2) = 2[q(2q+1)(2q+2)]$$

$n^3 - n$  mempunyai faktor 2, sehingga  $2|n^3 - n$

Jadi,  $2|n^3 - n$  untuk semua  $n \in \mathbb{Z}$

3. Buktikan  $4 \nmid n^2 + 2$  untuk semua  $n \in \mathbb{Z}$

Bukti :

Anggaplah  $4|n^2 + 2$

$n \in \mathbb{Z}$ , maka sesuai dengan Dalil 10,  $n = 2q$  atau  $n = 2q + 1$

Jika  $n = 2q$ , maka :

$$n^2 + 2 = (2q)^2 + 2 = 4q^2 + 2$$

$$4|n^2 + 2 \text{ dan } n^2 + 2 = 4q^2 + 2, \text{ maka } 4|4q^2 + 2$$

$$4|4(q^2 + q) \text{ dan } 4|4q^2 + 2, \text{ maka menurut Dalil 9, } 4|2$$

Tidak mungkin  $4|2$ , berarti terjadi kontradiksi, sehingga  $4 \nmid n^2 + 2$  untuk seberang bilangan bulat genap  $n$

Jika  $n = 2q + 1$ , yaitu :

$$n^2 + 2 = (2q + 1)^2 + 2 = 4q^2 + 4q + 1 + 2 = 4(q^2 + q) + 3$$

$$4|n^2 + 2 \text{ dan } n^2 + 2 = 4(q^2 + q) + 3, \text{ maka } 4|4(q^2 + q) + 3$$

$$4|4(q^2 + q) \text{ dan } 4|4(q^2 + q) + 3, \text{ maka } 4|3$$

Tidak mungkin  $4|3$ , berarti terjadi kontradiksi, sehingga  $4 \nmid n^2 + 2$  untuk seberang bilangan bulat ganjil  $n$ .

Jadi,  $4 \nmid n^2 + 2$  untuk semua  $n \in \mathbb{Z}$ .

## B. FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR (FPB)

Jika  $A$  adalah himpunan semua faktor  $a = 8$ ,  $B$  adalah himpunan semua faktor  $b = 12$ , dan  $C$  adalah himpunan faktor persekutuan dari  $a$  dan  $b$ , maka :

$$A = (-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8), \quad B = (-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12) \text{ dan } C = A \cap B = (-4, -2, -1, 1, 2, 4)$$

Perhatikan bahwa  $C$  memuat semua faktor persekutuan dari  $a$  dan  $b$  serta  $4$  merupakan bilangan bulat positif terbesar unsur dari  $C$ . dengan demikian  $4$  merupakan faktor persekutuan terbesar dari  $8$  dan  $12$ , yaitu  $4$  merupakan bilangan bulat positif terbesar yang membagi  $8$  dan  $12$ . Dengan jalan yang sama dapat ditunjukkan bahwa  $4$  merupakan bilangan bulat positif persekutuan terbesar dari  $a$  dan  $b$  dilambangkan dengan  $(a, b)$ , maka :

$$(8, 12) = (8, -12) = (-8, 12) = (-8, -12) = 4$$

Ternyata, faktor persekutuan terbesar dari  $a$  dan  $b$ , apapun ragam tanda masing-masing, selalu diperoleh bilangan bulat positif yang sama.

Jika  $a = 0$  dan  $b = 8$ , maka :

$$A = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \} \quad B = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}, \text{ dan } C = A \cap B = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

Sehingga  $(a,b) = (0,0)$  tidak ada karena  $C$  tidak mempunyai unsur terbesar.

### Definisi 3

Ditentukan  $x, y, \in \mathbb{Z}$ ,  $x$  dan  $y$  keduanya tidak bersama-sama bernilai 0.

$d \in \mathbb{Z}$  disebut faktor (pembagi) persekutuan (common factor, common divisor) dari  $x$  dan  $y$  jika  $d|x$  ( $d$  membagi  $x$ ) dan  $d|y$  ( $d$  membagi  $y$ ).

$d \in \mathbb{Z}$  disebut faktor persekutuan terbesar ( $gcf = \text{greatest common factor}$ ,  $gcd = \text{greatest common divisor}$ ) dari  $x$  dan  $y$  jika  $d$  adalah bilangan bulat positif terbesar sehingga  $d|x$  dan  $d|y$ .

Notasi :

$d = (x,y)$  dibaca  $d$  adalah faktor persekutuan terbesar (FPB) dari  $x$  dan  $y$ .

Perhatikan bahwa  $d = (a, B)$  didefinisikan untuk setiap  $a, b \in \mathbb{Z}$  kecuali  $a = 0$  dan  $b = 0$ , dan  $d = (a, b)$  selalu merupakan bilangan bulat positif yaitu  $d \in \mathbb{Z}$  dan  $d > 0$  (atau  $d \geq 1$ ).

Contoh 4.

1. Carilah  $(16,24)$

Jawab :  $A =$  himpunan semua faktor 16

$$= \{-16, -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8, 16\}$$

$B =$  himpunan semua faktor 24

$$= \{-24, -12, -8, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$C = A \cap B = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$$

8 adalah bilangan bulat positif terbesar unsur  $C$  maka  $(16, 24) = 8$

2. Carilah  $(6,9)$ , kemudian tentukan bilangan-bilangan bulat  $x$  dan  $y$  sehingga

$$6x + 9y = (6, 9), \text{ dan } 0 < 6x + 9y < (6, 9).$$

Jawab :  $(6,9) = 3$  sebab 3 adalah bilangan bulat positif terbesar yang membagi 6 dan 9.  $6x + 9y = (6, 9)$  dan  $(6, 9) = 3$ , maka  $6x + 9y = 3$  dengan mencoba-coba dapat diketahui bahwa beberapa nilai  $x$  dan  $y$  yang memenuhi adalah :  $x = -1$  dan  $y = 1$ ,  $x = 2$  dan  $y = -1$  serta  $x = 5$

dan  $y = -3$ .  $6x + 9y = 2$  dan  $6x + 9y = 1$  tidak mempunyai penyelesaian bulat.

### Dalil 11

Jika  $d = (a, b)$ , maka  $d$  adalah bilangan bulat positif terkecil yang mempunyai bentuk  $ax + by$  dengan  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

Sebelum membuktikan Dalil 11, peragaan berikut perlu diperhatikan untuk lebih dapat memahami alur kerja dari pembuktian Dalil 11.

Faktor persekutuan terbesar dari 6 dan 9 adalah 6, yaitu  $(6,9) = 3$ . selanjutnya dibentuk barisan bilangan  $6x + 9y$  dengan  $x, y \in \mathbb{Z}$  :

Jika  $x = 0$  dan  $y = 0$ , maka  $6x + 9y = 0$

Jika  $x = 0$  dan  $y = 1$ , maka  $6x + 9y = 9$

Jika  $x = 1$  dan  $y = 0$ , maka  $6x + 9y = 6$

Jika  $x = 1$  dan  $y = -1$ , maka  $6x + 9y = -3$

Jika  $x = -1$  dan  $y = 1$ , maka  $6x + 9y = 3$

Jika  $x = -1$  dan  $y = 2$ , maka  $6x + 9y = 12$

Jika  $x = -4$  dan  $y = 2$ , maka  $6x + 9y = -6$

Jika  $x = 0$  dan  $y = -1$ , maka  $6x + 9y = -9$

dengan susunan suku-suku barisan :

..., -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, ...

Misalkan  $S$  adalah himpunan bilangan unsur-unsur barisan yang positif :

$S = (3, 6, 9, 12, \dots)$

$= (6x + 9y \mid 6x + 9y > 0 \text{ dan } x, y \in \mathbb{Z})$

Karena  $S \subset \mathbb{N}$  dan  $\mathbb{N}$  adalah himpunan yang tertutup, maka menurut prinsip urutan rapi,  $S$  mempunyai bentuk  $6x + 9y$  (untuk  $x = 2$  dan  $y = -1$ , atau untuk  $x = -1$  dan  $y = 1$ ,  $6x + 9y = 3$ ).

Jelas bahwa 3 merupakan bilangan bulat positif terkecil yang mempunyai bentuk  $6x + 9y$ .

### Bukti Dalil 11

Nilai-nilai  $ax + by$  dengan  $x, y \in \mathbb{Z}$  disusun dalam suatu barisan.

Misalkan  $S$  adalah himpunan bilangan unsur-unsur barisan yang positif, yaitu :

$$S = \{ax + by > 0 \text{ dan } x, y \in \mathbb{Z}\}$$

maka  $S \subset \mathbb{N}$

Karena  $\mathbb{N}$  merupakan himpunan yang terurut rapi dan  $S \subset \mathbb{N}$ , maka  $S$  mempunyai unsur terkecil, sebutlah dengan  $t$ .

$t \in S$ , maka tentu ada  $x, y \in \mathbb{Z}$  sehingga  $t = ax + by$ . Selanjutnya harus dibuktikan bahwa  $t = d = (a, b)$ , yaitu  $t$  merupakan faktor persekutuan terbesar dari  $a$  dan  $b$ .

Misalkan  $t \nmid a$ , maka  $a \neq qt$  untuk semua  $q \in \mathbb{Z}$ , dan menurut Dalil 10,  $a = qt + r$  dengan  $0 < r < t$ , sehingga :

$r = a - qt = a - q(ax + by) = a(1 - qx) + b(-qy)$   
 Dengan demikian  $r \in S$  karena  $r$  mempunyai bentuk umum unsur  $S$ .  
 Untuk menunjukkan bahwa  $t$  adalah faktor persekutuan dari  $a$  dan  $b$ , perlu ditunjukkan bahwa  $t \mid b$ . bukti tidak langsung digunakan untuk menunjukkan  $t \mid a$ .

Misalkan  $t \nmid a$ , maka  $a \neq qt$  untuk semua  $q \in \mathbb{Z}$ , dan menurut Dalil 10.

$a = qt + r$  dengan  $0 < r < t$ , sehingga :

$$r = a - qt = a - q(ax + by) = a(1 - qx) + b(-qy)$$

Dengan demikian  $r \in S$  karena  $r$  mempunyai bentuk umum unsur  $S$ .

$r, t \in S, r < t$ , hal berarti  $t$  bukan unsur terkecil  $S$ , padahal  $t$  adalah unsur terkecil  $S$ , maka terjadi kontradiksi, berarti tidak benar  $t \nmid a$ , dengan kata lain  $t \mid a$ .

Dengan jalan yang sama dapat ditunjukkan bahwa  $t \mid b$ .

$t \mid a$  dan  $t \mid b$ , maka  $t$  adalah faktor persekutuan dari  $a$  dan  $b$ , berarti  $t$  faktor persekutuan dari  $a$  dan  $b$ , berarti  $t \leq d$  karena  $d$  adalah faktor persekutuan terbesar dari  $a$  dan  $b$ . kemudian dapat ditunjukkan  $d \leq t$  sebagai berikut :  
 $d = (a,b)$ , maka sesuai definisi 3,  $d \mid a$  dan  $d \mid b$

$d \mid a$  dan  $d \mid b$ , maka sesuai definisi 1, ada  $m, n \in \mathbb{Z}$  sehingga  $a = md$  dan  $b = nd$

$$t = ax + by, a = md, \text{ dan } b = nd, \text{ maka } t = (md)x + (nd)y \text{ atau}$$

$$t = d(mx + ny), \text{ berarti } d \mid t \text{ karena } mx + ny \in \mathbb{Z}$$

$d \mid t, d > 0$  dan  $t > 0$  maka sesuai dengan Dalil 7,  $d \leq t$ .

$t \leq d$  dan  $d \leq t$ , maka  $t = d$ , atau  $d = t$

Jadi :  $d = (a, b)$  adalah sama dengan  $t$ , yaitu merupakan bilangan bulat positif terkecil yang mempunyai bentuk  $ax + by$  dengan  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

Selanjutnya akan dibuktikan beberapa dalil penting tentang faktor persekutuan terbesar.

### *Dalil 12*

Jika  $m \in \mathbb{Z}$  dan  $m > 0$ , maka  $(ma, bm) = m(a, b)$

Bukti :

Misalkan  $(a, b) = r$  dan  $(ma, mb) = S$ , maka menurut Dalil 11, ada  $X, y, u, v \in \mathbb{Z}$  sehingga  $r = ax + by$  dan  $s = mau + mbv$ .

1.  $(a, b) = r$ , maka sesuai Definisi 3,  $r|a$  dan  $r|b$   
 $r|a$  dan  $r|b$ , maka sesuai Dalil 5,  $mr | ma$  dan  $mr | mb$  untuk semua  $m \in \mathbb{Z}$  dan  $m \neq 0$ .  $mr | ma$  dan  $mr | mb$ , maka sesuai Dalil 1,  $mr | mau + mbv$ , sehingga  $mr | s$   
 karena  $s = mau + mbv$ .
2.  $(ma, mb) = S$ , maka sesuai Definisi 3,  $s | ma$  dan  $s | mb$   
 $s | ma$  dan  $r | b$ , maka sesuai Dalil 8,  $s | ma$  dan  $s | mby$  untuk semua  $x, y \in \mathbb{Z}$ .  
 $s | max$  dan  $s | mby$ , maka sesuai Dalil 5,  $s | max + mby$ , atau  
 $s | m(ax + by)$ , sehingga  $s | mr$  karena  $r = ax + by$ .

Dari hasil butir 1 dapat dibuktikan  $mr | s$ , dan dari hasil butir 2 dapat dibuktikan  $s | mr$ , maka menurut Dalil 4,  $s > 0$  dan  $mr > 0$   $s = mr$ ,  $s = (ma, mb)$ , dan  $mr = m(a, b)$  maka  $(ma, mb) = m(a, b)$ . (terbukti).

Contoh :

1.  $(4, 6) = (2 \cdot 2, 2 \cdot 3) = 2(2, 3) = 2 \cdot 1 = 2$
2.  $(15, 40) = (5 \cdot 3, 5 \cdot 8) = 5(3, 8) = 5 \cdot 1 = 5$
3.  $(48, 84) = (12 \cdot 4, 12 \cdot 7) = 12(4, 7) = 12 \cdot 1 = 12$

Dalil 2 di atas digunakan untuk mencari FPB dari dua bilangan yang mempunyai faktor persekutuan, sehingga penyelesaiannya dapat disederhanakan dengan jalan mengeluarkan faktor persekutuan kedua bilangan.

### Dalil 13

Jika  $a, b \in \mathbb{Z}$  dan  $d = (a, b)$ , maka  $\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{d}\right) = 1$

Bukti

$d = (a, b)$ , maka menurut Definisi 3.  $d \mid a$  dan  $d \mid b$ , berarti  $\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \in \mathbb{Z}$

$d = (a, b) = (d \frac{a}{d}, d \frac{b}{d})$  dan sesuai dengan Dalil 12,  $d = d \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$ ,

berarti  $d \left(1 - \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)\right) = 0$

$d > 0$  dan  $d \left(1 - \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)\right) = 0$ , maka  $1 - \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 0$ , berarti

$\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$  (terbukti)

Contoh 6

1.  $(6, 9) = 3$ , maka  $\left(\frac{6}{3}, \frac{9}{3}\right) = (2, 3) = 1$
2.  $(12, 16) = 4$ , maka  $\left(\frac{12}{4}, \frac{16}{4}\right) = (3, 4) = 1$
3.  $(75, 90) = 15$ , maka  $\left(\frac{75}{15}, \frac{90}{15}\right) = (5, 6) = 1$

### Dalil 14

Jika  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $a \mid bc$ , dan  $(a, b) = 1$ , maka  $a \mid c$

Bukti :

$(a, b) = 1$ , maka sesuai dengan Dalil 11.1 adalah bilangan bulat positif yang mempunyai bentuk  $ax + by$ , dengan  $x, y \in \mathbb{Z}$ , yaitu  $ax + by = 1$ .

$ax + by = 1$ , maka  $cax + cby = c \cdot 1$  atau  $acx + bcy = c$ .

$a \mid bc$ , maka menurut Dalil 1,  $a \mid bcy$  untuk setiap  $y \in \mathbb{Z}$

$a \mid acx$  karena  $acx$  mempunyai faktor  $a$ .

$a \mid bcy$  dan  $a \mid acx$ , maka menurut Dalil 5,  $a \mid acx + bcy$ .

$a \mid acx + bcy$  dan  $acx + bcy = c$ , maka  $a \mid c$  (terbukti)

Contoh :

- a.  $5 \mid 30$ , atau  $5 \mid 3 \cdot 10$ , maka  $5 \mid 10$  sebab  $(5,3) = 1$
- b.  $4 \mid 60$ , atau  $4 \mid 5 \cdot 12$ , maka  $4 \mid 12$  sebab  $(4,5) = 1$

Perlu diperhatikan  $(a, b) = 1$  merupakan syarat perlu dan cukup berlakunya Dalil 14, jika  $a \mid bc$ , tidak diketahui bahwa  $(a, b) = 1$ , maka tidak dapat dijamin bahwa  $a \mid b$  maupun  $a \mid c$ .

Contoh 8.

1.  $4 \mid 12$ , atau  $4 \mid 2 \cdot 6$  ternyata  $4 \nmid 2$  dan  $4 \nmid 6$ .
2.  $20 \mid 40$ , atau  $20 \mid 5 \cdot 8$ , ternyata  $20 \nmid 5$  dan  $20 \nmid 8$
3.  $3 \mid 72$ , atau  $3 \mid 6 \cdot 12$ , ternyata  $3 \mid 6$  dan  $3 \mid 12$ .

*Dalil 15*

Jika  $(a, m) = 1$  dan  $(b, m) = 1$ , maka  $(ab, m) = 1$

Bukti :

$(a, m) = 1$ , maka sesuai dengan Dalil 11, ada  $x, y \in \mathbb{Z}$  sehingga  
 $ax + my = 1$ , atau  $ax = 1 - my$

$(b, m) = 1$ , maka sesuai dengan Dalil 11, ada  $r, s \in \mathbb{Z}$  sehingga  
 $br + ms = 1$ , atau  $br = 1 - ms$ .

$(ax)(br) = (1 - my)(1 - ms) = 1 - ms - my + m^2ys$

$(ax)(br) = 1 - (s + y - mys) m$

$(ax)(br) + (s + y - mys) m = 1$

$(xr)(ab) + (s + y - mys) m = 1$  (sifat komunitatif dan asosiatif)

jika  $u = xr$  dan  $w = s + y - mys$ , maka  $u, w \in \mathbb{Z}$ , sehingga  $u(ab) + wm = 1$

Karena 1 adalah bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi  $u(ab) + wm = 1$  dan tidak mungkin ada bilangan bulat positif yang kurang dari 1 dan mempunyai bentuk itu, maka sesuai dengan Dalil 11,  $(ab, m) = 1$  (terbukti)

Contoh :

- a.  $(3, 4) = 1$  dan  $(5, 4) = 1$ , maka  $(3 \cdot 5, 4) = (15, 4) = 1$
- b.  $(6, 11) = 1$  dan  $(9, 11) = 1$ , maka  $(6 \cdot 9, 11) = (54, 11) = 1$



### Dalil 16

Ditentukan  $x, y \in \mathbb{Z}$

$d = (a, b)$  jika dan hanya jika  $d > 0$ ,  $d \mid a$ ,  $d \mid b$ , dan  $f \mid d$  untuk setiap faktor persekutuan  $f$  dari  $a$  dan  $b$ .

Bukti

1. Jika  $d = (a, b)$ , maka sesuai dengan Definisi 3,  $d$  adalah bilangan bulat positif terbesar yang membagi  $a$  dan  $b$ , berarti  $d > 0$ ,  $d \mid a$  dan  $d \mid b$ .  
 $d = (a, b)$ , maka sesuai dengan Dalil 11,  $d$  bilangan bulat positif terkecil yang mempunyai bentuk  $ax + by$  dengan  $x, y \in \mathbb{Z}$ , yaitu :  $d = ax + by$   
 $f$  adalah faktor persekutuan dari  $a$  dan  $b$ , maka  $f \mid a$  dan  $f \mid b$ , sehingga  $f \mid ax$  dan  $f \mid by$  untuk setiap  $x, y \in \mathbb{Z}$ , dan menurut Dalil 5,  $f \mid ax + by$   
 $f \mid ax + by$  dan  $d = ax + by$ , maka  $f \mid d$ .  
Jadi, jika  $d = (a, b)$ , maka  $d > 0$ ,  $d \mid a$ ,  $d \mid b$ , dan  $f \mid d$ . (terbukti  $\Rightarrow$ )
2. Jika  $d > 0$ ,  $d \mid a$ ,  $d \mid b$ , dan  $f \mid d$  ( $f$  adalah sebarang faktor persekutuan dari  $a$  dan  $b$ ), maka  $d = kf$  dengan  $k \in \mathbb{Z}$ .  $d \mid a$  dan  $d \mid b$ , maka  $d$  adalah faktor persekutuan  $a$  dan  $b$ .  $d$  adalah faktor persekutuan  $a$  dan  $b$ , serta  $d \geq f$  ( $d$  lebih dari sebarang faktor persekutuan  $a$  dan  $b$ ), maka  $d = (a, b)$ .  
Jadi, jika  $d > 0$ ,  $d \mid a$ ,  $d \mid b$ , maka  $d = (a, b)$  (terbukti  $\Leftarrow$ )

### Contoh 10

1. Faktor – faktor persekutuan 4 dan 6 adalah -1, 1, -2, dan 2.  
 $(4, 6) = 2$ , maka  $-1 \mid 2$ ,  $1 \mid 2$ ,  $-2 \mid 2$ , dan  $2 \mid 2$
2. Faktor – faktor persekutuan 12 dan 18 adalah -1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, dan 6.  
 $(12, 18) = 6$ , maka  $-1 \mid 6$ ,  $1 \mid 6$ ,  $-2 \mid 6$ ,  $2 \mid 6$ ,  $-3 \mid 6$ ,  $3 \mid 6$ ,  $-6 \mid 6$ , dan  $6 \mid 6$

### Dalil 17

$(a, b) = (b, a) = (a, -b) = (-a, b) = (-a, -b) = (a, b + ax) = (a + by, b)$  untuk semua

$a, b, x, y \in \mathbb{Z}$ .

Bukti

1. Membuktikan  $(a, b) = (b, a)$

Misalkan  $d = (a, b)$ , maka menurut Definisi 3,  $d$  adalah bilangan bulat positif terbesar yang membagi  $a$  dan  $b$ , yaitu  $d > 0$ ,  $d \mid a$ , dan  $d \mid b$ . ini berarti bahwa  $d$  merupakan bilangan bulat positif terbesar yang membagi  $b$  dan  $a$ , yaitu  $d > 0$ ,  $d \mid a$ , dan  $d \mid b$ . ini berarti bahwa  $d$  merupakan bilangan bulat positif terbesar yang membagi  $b$  dan  $a$ .  
yaitu  $d > 0$ ,  $d \mid b$ , dan  $d \mid a$ .

Jadi  $(a, b) = (b, a)$  (terbukti)

2. Buktikan sendiri  $(a, b) = (a, -b)$  sendiri  $(a, b) = (a, -b)$ ,  $(-a, b)$  dan  $(a, b) = (-a, -b)$

3. Membuktikan  $(a, b) = (a, b + ax)$

$d = (a, b)$ , maka  $d \mid a$  dan  $d \mid b$  (definisi 3)

$d \mid a$ , maka  $d \mid ax$ , untuk semua  $x \in \mathbb{Z}$  (dalil 1)

$d \mid b$  dan  $d \mid ax$ , maka  $d \mid b + ax$  (Dalil 5)

$d \mid a$  dan  $d \mid b + ax$ , maka  $d$  adalah faktor persekutuan  $a$  dan  $(b + ax)$ , (definisi 3)

berarti  $d \mid (a, b + ax)$ , yaitu (dalil 16)

$d \mid e$  dengan  $e = (a, b + ax)$

$e = (a, b + ax)$ , maka  $e \mid a$  dan  $e \mid b + ax$  (definisi 3)

$e \mid a$ , maka  $e \mid ax$  (dalil 1)

$e \mid ax$  dan  $e \mid b + ax$ , maka  $e \mid b$  (dalil 5)

$e \mid a$  dan  $e \mid b$ , maka  $e$  adalah faktor persekutuan  $a$  dan  $b$ , berarti (definisi 3)

$e \mid (a, b)$ , atau  $e \mid d$  (dalil 16)

Karena  $d > 0$ ,  $e > 0$ ,  $d \mid e$ , dan  $e \mid d$

maka  $d = e$  (dalil 4)

Jadi  $(a, b) = (a, b + ax)$  (terbukti)

4. Buktikan sendiri  $(a, b) = (a + by, b)$

Contoh 11

a.  $(6, 9) = 3$ , maka  $(9, 6) = 3$ ,  $(-6, 9) = 3$ ,  $(6, -9) = 3$ , dan  $(-6, -9) = 3$

b.  $(18, 48) = (18, 12 + 2 \cdot 18) = (18, 12) = (6 + 1 \cdot 12, 12) = (6, 12) = (6, 12) = 6(1, 2)$

$$= 6 \cdot 1 = 6$$

c.  $(345, 90) = (75 + 3 \cdot 90, 90) = (75, 90) = (75, 15 + 1 \cdot 75) = (75, 15) = 15(5, 1) =$

$$15.1 = 15$$

*Dalil 18 (Dalil Algoritma Euclides)*

Jika  $r_0, r_1 \in \mathbb{Z}$ ,  $r_0 > r_1$ , dan  $r_0, r_1 > 0$ , maka :

$$r_0 = q_1 r_1 + r_2 \quad , \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = q_2 r_2 + r_3 \quad , \quad 0 \leq r_3 < r_2$$

$$r_2 = q_3 r_3 + r_4 \quad , \quad 0 \leq r_4 < r_3$$

-

-

-

$$r_{k-2} = q_{k-1} r_{k-1} + r_k \quad , \quad 0 \leq r_k < r_{k-1}$$

$$r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1} \quad , \quad r_{k+1} = 0$$

dan  $(r_0, r_1) = r_k$

Bukti :

Diketahui  $r_0, r_1 \in \mathbb{Z}$ ,  $r_0 > r_1$ , dan  $r_0, r_1 > 0$ , maka menurut Dalil 10, ada bilangan-bilangan  $q_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ , dan  $q_1 r_2 > 0$  sehingga  $r_0 = q_1 r_1 + r_2$  dengan  $0 \leq r_2 < r_1$

Berikutnya,  $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $r_1 > r_2$ , dan  $r_1, r_2 > 0$ , maka menurut Dalil 10, ada bilangan-bilangan  $q_2, r_3 > 0$  sehingga  $r_1 = q_2 r_2 + r_3$  dengan  $0 \leq r_3 < r_2$ .

Dengan jalan yang sama dapat ditunjukkan bahwa :

$$r_2 = q_3 r_3 + r_4 \quad , \quad 0 \leq r_4 < r_3$$

,

,

,

$$r_{k-2} = q_{k-1} r_{k-1} + r_k \quad , \quad 0 \leq r_k < r_{k-1}$$

$$r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1} \quad , \quad r_{k+1} = 0$$

selanjutnya, sesuai dengan Dalil 16 :

$$(r_0, r_1) = (q_1 r_1 + r_2, r_1) = (r_2, r_1) = (r_2, q_2 + r_2) = (r_2, r_3)$$

$$= \dots = (r_k, r_{k-1}) = (r_k, 0)$$

$$(r_0, r_1) = r_k \quad (\text{terbukti})$$

Dalil 18 dapat digunakan untuk mencari FPB sebarang dua bilangan bulat  $a$  dan  $b$  ( $a$  dan  $b$  tidak bersama-sama bernilai nol). Pengerjaan dilakukan secara bertahap menggunakan algoritma pembagian (Dalil 10)

untuk memperkecil atau menyederhanakan bilangan-bilangan yang terkait.

### Contoh 12

1. Carilah  $(105, 60)$  dengan menggunakan Dalil Algoritma Euclides.

$$\text{Jawab : } 105 = 1.60 + 45, 0 \leq 45 < 60, (105, 60) = (45 + 1.60, 60) = (45, 60)$$

$$60 = 1.45 + 15, 0 \leq 15 < 45, (45, 60) = (45, 45 + 1.15) = (45, 15)$$

$$45 = 3.15 + 0, 0 \leq 0 < 15, (45, 15) = 15(3, 1) = 15.1 = 1$$

$$\text{Jadi } (105, 60) = 15$$

2. Carilah  $(570, 1100)$  dengan menggunakan Dalil Algoritma Euclides

$$\text{Jawab : } 1100 = 1.570 + 530, 0 \leq 530 < 570$$

$$570 = 1.530 + 40, 0 \leq 40 < 530$$

$$40 = 4 \cdot 10 + 0, 0 \leq 0 < 10$$

$$(570, 1100) = (570, 530) = (40, 530) = (40, 10) = 10(4, 1) \\ = 10.1 = 10$$

Dalil 18 juga dapat digunakan untuk menyatakan  $(a, b)$  sebagai  $xa + yb$  dengan  $x, y \in \mathbb{Z}$  ( $xa + yb$ ) disebut kombinasi linear dari  $a$  dan  $b$ ).

### Contoh 13

1. Carilah  $x, y \in \mathbb{Z}$  sehingga  $(105, 60) = x(105) + y(60)$

Jawab : Dari contoh 12.1 dapat dicari :

$$15 = 60 - 1.45 = 60 - 1(105 - 1.60) = 2(60) - 1(105)$$

$$15 = (-1)(105) + 2(60)$$

$$\text{Jadi : } x = -1 \text{ dan } y = 2$$

2. Carilah  $x, y \in \mathbb{Z}$  sehingga  $(570, 1100) = x(570) + y(1100)$

Jawab : Dari contoh 12.2 dapat dicari :

$$10 = 530 - 13.40 = 530 - 13(570 - 1.530) = 14.530 - 13.570$$

$$= 14(1100 - 1.570) - 13.570 = 14.1100 - 27.570$$

$$10 = (-27)(570) + 14(1100)$$

$$\text{Jadi : } x = -27 \text{ dan } y = 14$$

## C. KELIPATAN PERSEKUTUAN TERKECIL (KPK)

### Definisi 4

Jika  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0$ , maka

- $k$  disebut kelipatan persekutuan (common multiple) dari  $a$  dan  $b$  jika  $a \mid k$  dan  $b \mid k$ .
- $k$  disebut kelipatan persekutuan terkecil (least common multiple) dari  $a$  dan  $b$  jika  $k$  adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga  $a \mid k$  dan  $b \mid k$ .

Notasi:  $k = (a, b)$  dibaca  $k$  adalah kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari  $a$  dan  $b$ .

### Contoh 14

Carilah  $(12, 16)$

Jawab :

Karena  $(12, 16)$  bernilai positif, maka  $(12, 16)$  dapat dicari dari kelipatan persekutuan yang positif.

$A =$  himpunan kelipatan 12 yang positif  $= (12, 24, 36, 48, 60 \dots)$

$B =$  himpunan kelipatan 16 yang positif  $= (16, 32, 48, 64 \dots)$

$C =$  himpunan kelipatan persekutuan 12 dan 16 yang positif  
 $= A \cap B = (48, 96, 144, \dots)$

Unsur  $C$  yang terkecil adalah 48, maka  $(12, 16) = 48$

### Dalil 19

Ditentukan  $a, b, k \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0$ , dan  $b \neq 0$

$k = (a, b)$  jika dan hanya jika  $a \mid k$ ,  $b \mid k$ ,  $k > 0$  dan untuk sebarang kelipatan persekutuan  $m$  dari  $a$  dan  $b$  berlaku  $k \mid m$ .

Bukti :

- Diketahui  $k = (a, b)$ , maka sesuai dengan Definisi 4,  $a \mid k$ ,  $b \mid k$ , dan  $k > 0$ .

Misalkan  $m$  adalah sebarang kelipatan persekutuan dari  $a$  dan  $b$ , maka  $k \leq m$ .

Menurut Dalil 10, jika  $k \leq m$  dan  $k > 0$ , maka ada bilangan-bilangan  $q, r \in \mathbb{Z}$  sehingga  $m = qk + r$ , atau  $r = m - qk$  dengan  $0 \leq r < k$ .

$a \mid k$  dan  $b \mid k$ , maka sesuai dengan Dalil 1,  $a \mid qk$  dan  $b \mid qk$  untuk sebarang  $k \in \mathbb{Z}$ .

$m$  adalah kelipatan persekutuan dari  $a$  dan  $b$ , maka sesuai dengan Definisi 4,  $a \mid m$  dan  $b \mid m$ .

$a \mid m$ ,  $b \mid m$ ,  $a \mid qk$ , dan  $b \mid qk$ , maka menurut Dalil 5,  $a \mid m - qk$  dan  $b \mid m - qk$ , berarti  $r = m - qk$  adalah kelipatan persekutuan dari  $a$  dan  $b$ .

$r$  dan  $k$  adalah kelipatan-kelipatan persekutuan dari  $a$  dan  $b$ ,  $k$  adalah kelipatan persekutuan dari  $a$  dan  $b$  yang terkecil, dan  $0 \leq r < k$ , maka nilai  $r$  yang memenuhi adalah  $r = 0$ , berarti  $m - qk = 0$ , atau  $m = qk$   
 $m = qk$ , maka  $k \mid m$  (terbukti  $\Rightarrow$ )

b) Diketahui  $a \mid k$ ,  $b \mid k > 0$  dan untuk sekarang kelipatan persekutuan  $m$  dari  $a$  dan  $b$  berlaku  $k \mid m$ .

$a \mid b$  dan  $b \mid k$ , maka sesuai dengan Definisi 4,  $k$  adalah kelipatan persekutuan dari  $a$  dan  $b$ .

$k$  dan  $m$  adalah kelipatan-kelipatan persekutuan dari  $a$  dan  $b$ ,  $k > 0$ , dan  $k \mid m$ , maka  $k$  adalah bilangan bulat positif terkecil yang merupakan kelipatan persekutuan dari  $a$  dan  $b$  ( $a \mid k$  dan  $b \mid k$ ), dan sesuai dengan Definisi 4,  $k = (a, b)$  (terbukti  $\Leftarrow$ )

### Contoh 15

1.  $A =$  himpunan semua kelipatan  $4 = (\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 12, \dots)$

$B =$  himpunan semua kelipatan  $6 = (\dots, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, \dots)$

$C =$  himpunan semua kelipatan persekutuan  $A$  dan  $B$

$= A \cap B = (\dots, -24, -12, 0, 12, 24, 36, 48, 60, \dots)$

Unsur  $C$  yang terkecil dan positif adalah  $12$ , berarti  $(4, 6) = 12$ . perhatikan bahwa  $12 \mid 0$ ,  $12 \mid -12$ ,  $12 \mid 24$ ,  $12 \mid 36$ ,  $12 \mid 48$ ,  $12 \mid 60$ ,  $\dots$ ,  $12$  membagi sebarang kelipatan persekutuan dari  $4$  dan  $6$ .

2. Kelipatan persekutuan  $6$  dan  $8$  adalah  $0, \pm 24, \pm 48, \pm 72, \dots$  bilangan bulat positif terkecil yang merupakan kelipatan persekutuan  $6$  dan  $8$  adalah  $24$ , berarti  $(6, 8) = 24$ . perhatikan bahwa  $24 \mid 0$ ,  $24 \mid \pm 24$ ,  $24 \mid \pm 28$ ,  $24 \mid \pm 72 \dots$ ,  $24$  membagi sebarang persekutuan dari  $6$  dan  $8$ .

### Dalil 20

$m(a, b) = (ma, mb)$  untuk sekarang  $m \in \mathbb{N}$

Bukti : lihat latihan

### *Dalil 21*

Jika  $a, b \in \mathbb{N}$  dan  $(a,b) = 1$ , maka  $(a, b) = ab$

Bukti : Lihat latihan

### *Dalil 22*

$(a, b) = ab$  untuk sebarang  $a, b \in \mathbb{N}$

Bukti : Lihat latihan

## **RANGKUMAN**

Setelah mempelajari uraian dalam kegiatan ini, beberapa keadaan dan sifat penting adalah :

1. Keterbagian selalu mendasari uraian-uraian berikutnya, terutama dalam pengembangan sifat-sifat FPB dan KPK.
2.  $a \mid b$  jika ada  $x \in \mathbb{Z}$  sehingga  $b = ax$
3. Jika  $a \mid b$ , maka  $a \mid bc$  untuk setiap  $c \in \mathbb{Z}$
4. Jika  $a \mid b$ , dan  $b \mid c$ , maka  $a \mid c$
5. Jika  $a \mid b$  dan  $b \mid a$ , maka  $a = \pm b$
6. Jika  $a, b > 0$ ,  $a \mid b$ , dan  $b \mid a$  maka  $a = b$
7. Jika  $a \mid b$  dan  $a \mid c$ , maka  $a \mid bc \pm c$
8. Jika  $a \mid b$  dan  $a \mid c$ , maka  $a \mid bx \pm cy$  untuk semua  $x, y \in \mathbb{Z}$
9. Jika  $a, b > 0$  dan  $a \mid b$ , maka  $a \leq b$
10.  $a \mid b$  jika dan hanya  $ma \mid mb$  untuk semua  $m \in \mathbb{Z}$  dan  $m \neq 0$
11. Jika  $a \mid b$  dan  $a \mid b \pm c$ , maka  $a \mid c$
12. Dalil Algoritma pembagian dapat digunakan untuk memisahkan himpunan bilangan bulat menjadi 2 kelompok, 3 kelompok, 4 kelompok, ..., k kelompok ( $k=2, 3, 4, \dots$ )
13.  $(a, b)$  adalah bilangan bulat positif terbesar sehingga membagi  $a$  dan membagi  $b$ .
14.  $(a, b)$  dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear  $ax + by$  dengan  $x, y \in \mathbb{Z}$ .
15.  $(ma, mb) = m(a, b)$  untuk sebarang  $m \in \mathbb{Z}$

16.  $\left( \frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)} \right) = 1$
17. Jika  $a \mid b$  dan  $(a, b) = 1$ , maka  $a \mid c$
18. Jika  $(a, m) = 1$  dan  $(b, m) = 1$ , maka  $(ab, m) = 1$
19. Jika  $f$  adalah sebarang faktor persekutuan  $a$  dan  $b$ , maka  $f \mid (a, b)$
20. Jika  $k$  adalah sebarang kelipatan dari  $a$  dan  $b$ , maka  $[a, b] \mid k$
21.  $(a, b) = (b, a) = (a, -b) = (-a, b) = (-a, -b) = (a, b + ax) = (a + by, b)$
22. Dalil Algoritma Euclides dapat mempermudah proses pencarian FBP.
23. Dalil Algoritma Euclides dapat digunakan untuk menyatakan FPB sebagai kombinasi linear dari bilangan-bilangan komponen FPB.
24.  $(a, b)$  adalah bilangan bulat positif terkecil yang habis dibagi oleh  $a$  dan  $b$ .
25.  $m(a, b) = (ma, mb)$  untuk sebarang  $m \in \mathbb{N}$
26.  $(a, b)[a, b] = ab$  untuk sebarang  $a, b \in \mathbb{N}$

## LATIHAN

Untuk latihan memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, silakan Anda mengerjakan latihan berikut ini?

- Nyatakan kembali makna dari
 

a. $t \mid r$	c. $d = (p, q)$	e. $a = (r, s)$
b. $s \mid 2p$	d. $m = (2x, 3y)$	f. $b = (3m, 2n)$
- Nyatakan dengan B (benar) atau S (salah)
 

a. $(-12, -13) = -4$	f. $(28, 42) = (2, 3)$
b. $(0, 6) = 6$	g. $(8, -10) = -40$
c. $(6, -9) = 3$	h. $(-15, -20) = 60$
d. $(36, 45) = (36, 117)$	i. $(9, 12) = 9 \times 12$
e. $(81, 108) = (297, 108)$	j. $(3, 4) = (4, 3)$
- Carilah nilai-nilai dari
 

b. $(x, 2x)$ jika $x \in \mathbb{N}$	c. $(k, k + 6)$ jika $k \in \mathbb{N}$
c. $(t, t^2)$ jika $t \in \mathbb{N}$	d. $(a^2, b^2)$ jika $(a, b) = 3$
- Buktikan “ $3 \mid (n^3 - n)$  untuk semua  $n \in \mathbb{Z}$ ”
  - Carilah  $(7897, 4399)$  dan nyatakan sebagai  $7897x + 4399y$
  - Carilah  $(7321, 3145)$  dan nyatakan sebagai  $4321x + 3145y$



6. Buktikan : jika  $(a, 4) = 2$  dan  $(b, 4) = 2$ , maka  $(a + b, 4) = 4$
7. Buktikan :  $m(a, b) = (ma, mb)$
8. Buktikan : jika  $a, b \in \mathbb{N}$  dan  $(a, b) = 1$ , maka  $(a, b)(a, b) = ab$
9. Buktikan :  $(a, b)(a, b) = ab$  untuk sebarang  $a, b \in \mathbb{N}$
10. Buktikan : Jika  $p|q$  dan  $(p, r) = 1$  maka  $p|qr$
11. Buktikan : jika  $(a, p^2) = p$  dan  $(b, p^2) = p$  maka  $(ab, p^4) = p^3$
12. Buktikan : Jika  $(a, 4) = 2$  dan  $(b, 4) = 2$ , maka  $(a^2b^2, 32) = 16$
13. Carilah nilai-nilai  $d$  jika  $d = (a + b, a - b)$  dan  $d = (a, b)$
14. Tunjukkan :  $(p, p + q)|q$  jika  $p$  dan  $q$  tidak keduanya nol
15. Tunjukkan :  $(a, b)|q$  jika  $p$  dan  $q$  tidak keduanya nol
16. Tunjukkan :  $(a, b)|c$  jika dan hanya jika  $a|c$  dan  $b|c$

## D. KEPRIMAAN

Keprimaan sejarah matematika, kajian pembahasan tentang bilangan prima telah dilakukan manusia selama ratusan tahun. Sekitar abad 6 S.M., Pythagoras dan kelompoknya telah mempelajari sifat-sifat bilangan, antara lain bilangan sempurna (perfect numbers), bilangan bersekawan (amicable numbers), bilangan segibanyak (polygonal/figurate numbers), dan bilangan prima (prime numbers). Selanjutnya, sekitar abad 4 S.M., Euclides mengembangkan konsep-konsep dasar teori bilangan. Salah satu karya Euclides yang terkenal dan masih digunakan sebagai satu-satunya bukti adalah pembuktian matematis formal bahwa banyaknya bilangan prima adalah tak terhingga. Karya Erastosthenes pada abad ke 3 S.M. Yang disebut Saringan Erastosthenes (The Sieve of Eratosthenes) merupakan karya yang terkenal untuk membuat daftar bilangan prima.

### *Definisi 5*

Bilangan prima adalah bilangan asli lebih dari 1 yang tepat mempunyai dua faktor. Bilangan asli yang mempunyai lebih dari dua faktor disebut bilangan komposit.

Contoh 16

1. Bilangan-bilangan 2, 3, dan 5 adalah bilangan-bilangan prima sebab :

- a. 2 adalah bilangan asli lebih dari satu yang tepat mempunyai dua faktor yaitu 1,2.
  - b. 3 adalah bilangan asli lebih dari satu yang tepat mempunyai dua faktor yaitu 1,3.
  - c. 5 adalah bilangan asli lebih dari satu yang tepat mempunyai dua faktor yaitu 1,5.
2. Bilangan-bilangan 4, 6 dan 15 adalah bilangan-bilangan komposit sebab :
- a. 4 adalah bilangan asli lebih dari satu yang mempunyai lebih dari dua faktor yaitu 1, 2 dan 4
  - b. 6 adalah bilangan asli lebih dari satu yang mempunyai lebih dari dua faktor yaitu 1, 2, 3, dan 6
  - c. 15 adalah bilangan asli lebih dari satu yang mempunyai lebih dari dua faktor yaitu 1, 3, 5, dan 15

Didalam sejarah matematika, kajian tentang bilangan prima antara lain terkait dengan sejumlah usaha manusia untuk membuat “rumus” tentang bilangan prima, yaitu cara atau prosedur untuk memperoleh atau membuat daftar bilangan prima.

1. Eratosthenes, seorang matematikawan Yunani Kuno (Greek), pada sekitar tahun 300 S.M., telah membuat proses yang terdiri atas langkah-langkah tertentu untuk membuat daftar bilangan prima, terkenal dengan sebutan Saringan Eratosthenes (The Sieve of Eratosthenes). Berikut ini adalah peragaan saringan Eratosthenes untuk membuat daftar bilangan prima kurang dari atau sama dengan 100.
  - a. Membuat daftar bilangan dari 1 s.d 100, misalkan ditulis berurutan dalam 10 baris dan 10 lajur.
  - b. Mencoret bilangan 1
  - c. Melingkari bilangan 2 dan mencoret semua bilangan kelipatan 2
  - d. Melingkari bilangan 3 dan mencoret semua bilangan kelipatan 3
  - e. Melingkari bilangan 5 dan mencoret semua bilangan kelipatan 5
  - f. Melingkari bilangan 7 dan mencoret semua bilangan kelipatan 7
  - g. Melingkari semua bilangan yang belum dilingkari dan belum dicoret
  - h. Melihat hasil melingkari dan mencoret :

1   ~~2~~   ③   ④   ~~5~~   ⑥   ~~7~~   ⑧   ~~9~~   ~~10~~   /  
 11   ⑫   ~~13~~   ⑭   ~~15~~   ~~16~~   ~~17~~   ⑮   ~~19~~   ⑳   /  
 21   ~~22~~   ~~23~~   ㉔   ~~25~~   ~~26~~   ~~27~~   ~~28~~   ~~29~~   ㉖   /  
 31   ㉗   ~~33~~   34   ~~35~~   ~~36~~   ~~37~~   ㉘   ~~39~~   ~~40~~   /  
 41   ㉙   ~~43~~   ㉚   ~~45~~   ~~46~~   ~~47~~   ㉛   ~~49~~   ~~50~~   /  
 51   ~~52~~   ~~53~~   ㉜   ~~55~~   ~~56~~   ~~57~~   ~~58~~   ~~59~~   ㉝   /  
 61   ㉞   ~~63~~   ~~64~~   ~~65~~   ~~66~~   ~~67~~   ㉟   ~~69~~   ~~70~~   /  
 71   ㊱   ~~73~~   ㊲   ~~75~~   ~~76~~   ~~77~~   ~~78~~   ~~79~~   ㊳   /  
 81   ~~82~~   ~~83~~   ㊴   ~~85~~   ~~86~~   ~~87~~   ~~88~~   ~~89~~   ~~90~~   /  
 91   ~~92~~   ~~93~~   ~~94~~   ~~95~~   ~~96~~   ~~97~~   ㊵   ~~99~~   ~~100~~   /

i. Mendatar semua bilangan prima kurang dari 100 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Proses di atas secara sederhana dapat dijelaskan sebagai berikut :

Jika  $n = 100$  dicari faktor-faktornya, maka penyelidikan yang dapat dipergunakan adalah menyatakan  $n = pq$ , yaitu :

$$\begin{array}{lll}
 100 = 1.100 & 100 = 4.25 & 100 = 10.10 \\
 100 = 2.50 & 100 = 5.20 &
 \end{array}$$

Keadaan di atas menunjukkan bahwa semua faktor 100, yang lebih dari 10 maupun kurang dari 10, adalah 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100. Selanjutnya, jika p semakin besar, maka q semakin kecil, nilai-nilai p dan q keduanya tidak boleh bersama-sama lebih dari 10. Sifatnya ini

digunakan untuk mengetahui bahwa semua bilangan komposit telah dicoret.

Dari daftar bilangan 1, 2, 3, ..., 100, bilangan-bilangan 2, 3, 5, dan 7 adalah bilangan-bilangan prima, dan bilangan berikutnya adalah 11.

### *Dalil 23*

Jika  $n \in \mathbb{Z}$ , maka  $n$  mempunyai faktor prima terbesar  $p$  sehingga  $p \leq \sqrt{n}$

Bukti :

Misalkan tidak benar bahwa  $n$  mempunyai faktor  $p \leq \sqrt{n}$  berarti  $n$  paling sedikit mempunyai dua faktor  $n > \sqrt{n}$  dan  $q > \sqrt{n}$ .

Maka  $n = pq > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}$ , atau  $n = pq > n$ , yaitu  $n > n$ .

Ternyata terjadi kontradiksi, berarti  $n$  mempunyai faktor prima terbesar  $p \leq \sqrt{n}$ .

Secara umum kerja dari saringan Erastosthenes adalah :

1. Mencari bilangan prima terbesar kurang dari atau sama dengan  $\sqrt{n}$
2. Mencoret semua bilangan kelipatan bilangan-bilangan prima itu sendiri)
3. Semua bilangan yang tersisa adalah bilangan-bilangan prima.

### Contoh 17

1. Di dalam menggunakan kerja saringan Erastosthenes :
  - a. Jika  $n = 100$ , maka pencoretan dihentikan pada bilangan prima terbesar  $p \leq \sqrt{100}$ , yaitu  $p = 7$ .
  - b. Jika  $n = 200$ , maka pencoretan dihentikan pada bilangan prima terbesar  $p \leq \sqrt{200}$ , yaitu  $p = 13$
  - c. Jika  $n = 500$ , maka pencoretan dihentikan pada bilangan prima terbatas  $p \leq \sqrt{500}$ , yaitu  $p = 19$
  - d. Jika  $n = 1000$ , maka pencoretan dihentikan pada bilangan prima terbesar  $p \leq \sqrt{1000}$ , yaitu  $p = 31$

2. Dalil 23 di atas dapat digunakan sebagian besar pembuatan program komputer BASIC sederhana untuk mendaftar semua bilangan prima kurang dari atau sama dengan  $n \in \mathbb{N}$ . Program dan contoh eksekusi (pelaksanaan) program untuk  $n = 1000$  adalah seperti di bawah..

Rumusan lain untuk memperoleh bilangan prima adalah :

$f(n) = n^2 - n + 41$  adalah bilangan prima untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$  Jika  $f(n)$  didaftar untuk  $n = 1$  s.d  $n = 40$ , maka diperoleh daftar berikut :

n	f(n)	n	f(n)	n	f(n)	n	f(n)
1	41	11	151	21	461	31	971
2	43	12	173	22	503	32	1033
3	47	13	197	23	547	33	1097
4	53	14	223	24	593	34	1163
5	61	15	251	25	641	35	1231
6	71	16	281	26	691	36	1301
7	83	17	313	27	743	37	1373
8	97	18	347	28	797	38	1447
9	113	19	383	29	853	39	1523
10	131	20	421	30	911	40	1601

Untuk  $n = 41$ , ternyata

$$f(n) = n^2 - n + n + 41 = 1681 = 41.41$$

Karena  $f(n)$  habis dibagi oleh 1,41, dan 1681, maka  $f(n) = 1681$  bukan bilangan prima, sehingga  $f(n) = n^2 - n + 41$  gagal untuk menjadi rumus mencari bilangan prima.

3. Rumusan  $f(n) = n^2 - 79n + 1601$  gagal menjadi rumus bilangan prima sebab :

$$f(n) = 81^2 - 79.81 + 1601 = 1763 = 41.43$$

Menghasilkan bilangan  $1763 = 41 \cdot 43$  yang habis dibagi oleh 41, 43 dan 1763, sehingga 1763 bukan merupakan bilangan prima.

4. Format juga mempunyai rumus bilangan prima, yaitu ;

$$f(n) = 2^{2^n} + 1$$

Jika secara berturut-turut  $n$  diganti 1, 2, 3, dan 4 maka diperoleh :

$$f(1) = 2^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5 \text{ (bilangan prima)}$$

$$f(2) = 2^4 + 1 = 2^4 + 1 = 17 \text{ (bilangan prima)}$$

$$f(3) = 2^8 + 1 = 2^8 + 1 = 257 \text{ (bilangan prima)}$$

$$f(4) = 2^{16} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537 \text{ (bilangan prima)}$$

tetapi, jika  $n$  diganti 5, maka diperoleh :

$$f(5) = 2^{32} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297$$

$f(5)$  bukan bilangan prima karena habis dibagi oleh 641

Jadi, rumus Fermat gagal untuk  $n = 5$

#### *Dalil 24*

Jika  $n \in \mathbb{Z}$  dan  $n$  adalah komposit, maka ada bilangan prima sehingga  $p|n$

Bukti :

Misalkan tidak ada bilangan prima  $p$  yang memenuhi  $p | n$ , dan  $S$  adalah himpunan semua bilangan komposit yang tidak mempunyai faktor prima, dengan  $S = \emptyset$ .

Jika  $S = \emptyset$ , maka menurut Prinsip Terurut Rapi, karena  $S \subseteq \mathbb{N}$ , maka  $S$  mempunyai unsur terkecil  $m$ .

$m \in S$ , maka  $m = m_1 - m_2$  dengan  $1 < m_1 < m$  dan  $1 < m_2 < m$ .

$m_1 \notin S$  sebab  $m$  adalah unsur terkecil  $S$ , berarti  $m_1$  adalah bilangan prima atau bilangan yang mempunyai faktor prima.

Ternyata terjadi kontradiksi karena  $m \in S$  mempunyai faktor prima. Jadi  $S = \emptyset$ , yaitu ada bilangan prima  $p$  yang memenuhi  $p | n$ .

Ternyata terjadi kontradiksi karena  $m \in S$  mempunyai faktor prima. Jadi  $S = \emptyset$ , yaitu ada bilangan prima  $p$  yang memenuhi  $p | n$ .

#### *Dalil 25*

Jika  $p$  adalah suatu bilangan prima dan  $p | ab$ , maka  $p | a$  atau  $p | b$

Bukti

Anggaphlah  $p \nmid a$

$p$  adalah bilangan prima, maka faktor  $p$  adalah 1 dan  $p$ , berarti  $(a,p) = 1$  atau  $(a,p) = p$

Karena  $p \nmid a$ , maka  $(a,p) = 1$  berakibat  $p \mid b$ .

Dengan jalan yang sama, jika dianggap  $p \nmid b$ , maka dapat dibuktikan bahwa  $p \mid a$ .

Cara lain :

$(a,p) = 1$ , maka ada  $x, y \in \mathbb{Z}$  sehingga  $ax + py = 1$ , berarti  $abx + bpy = b$

$p \mid ab$  dan  $p \mid p$ , maka  $p \mid abx$  dan  $p \mid bpy$  (Dalil 1)

$p \mid abx$  dan  $p \mid bpy$ , maka  $p \mid abx + bpy$  (Dalil 5)

Karena  $p \mid abx + bpy$  dan  $abx + bpy = b$ , maka  $p \mid b$

Dengan jalan yang sama, jika dianggap  $p \nmid b$ , maka dapat dibuktikan bahwa  $p \mid a$ .

Cara lain :

$(a,p) = 1$ , maka ada  $x, y \in \mathbb{Z}$  sehingga  $ax + py = 1$ , berarti  $abx + bpy = b$

$p \mid ab$  dan  $p \mid p$ , maka  $p \mid abx$  dan  $p \mid bpy$  (Dalil 1)

$p \mid abx$  dan  $p \mid bpy$ , maka  $p \mid abx + bpy$  (dalil 5)

Karena  $p \mid abx + bpy$  dan  $abx + bpy = b$ , maka  $p \mid b$

Dengan jalan yang sama, jika dianggap  $p \nmid b$ , maka dapat dibuktikan bahwa  $p \mid a$ .

### Dalil 26

Banyaknya bilangan prima adalah tak terhingga.

Bukti :

Anggaplah bahwa banyaknya bilangan prima adalah terhingga yaitu  $P_1, P_2, \dots, P_k$  adalah daftar semua bilangan prima, dan tentukan  $B = P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_k + 1$ . jika  $B$  adalah bilangan prima, yaitu  $B = P_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ), maka  $B \mid B$  yaitu

$$P_i \mid P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_k + 1$$

$$P_i \mid P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_k \quad (\text{Dalil 1})$$

$$P_i \mid P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_k + 1 \text{ dan } P_i \mid P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_k, \text{ maka } P_i \mid 1 \quad (\text{Dalil 9})$$

Terjadi kontradiksi karena tidak ada bilangan prima yang membagi 1.

Jika  $B$  adalah bilangan komposit, maka sesuai Dalil 24, ada bilangan prima  $P_j$ ,

$$(1 \leq j \leq k) \text{ sehingga } P_j \mid B$$

$P_1 \mid B$ , maka  $P_1 \mid P_1 P_2 \dots P_1 \dots P_k + 1$

$P_1 \mid P_1$ , maka  $P_1 \mid P_1 P_2 \dots P_1 \dots P_k$  (Dalil 1)

$P_1 \mid P_1 P_2 \dots P_1 \dots P_k + 1$  dan  $P_1 \mid P_1 P_2 \dots P_1 \dots P_k$  maka  $P_1 \mid$  (Dalil 9)

Terjadi kontradiksi karena tidak ada bilangan komposit yang membagi 1  
Jadi banyaknya bilangan prima adalah tak terhingga.

### Dalil 27

Ditentukan  $a_i \in \mathbb{Z}$ ,  $1 \leq i \leq n$

Jika  $p$  adalah suatu bilangan prima dan  $p \mid a_1 a_2 \dots a_n$ , maka  $p \mid a_i$  untuk suatu  $1 \leq i \leq n$ .

Bukti

$p \mid a_1 a_2 \dots a_n$ , atau  $p \mid a_1 (a_2 a_3 \dots a_n)$ , maka menurut Dalil 25,  $p \mid a_1$  atau  $p \mid a_2 a_3 \dots a_n$ .

Jika  $p \mid a_1$ , maka  $p \mid a$  untuk suatu  $i = 1$

Jika  $p \mid a_1$ , maka  $p \mid a_2 a_3 \dots a_n$  atau  $p \mid a_2 (a_3 a_4 \dots a_n)$ , sehingga  $p \mid a_2$  atau  $p \mid a_3 a_4 \dots a_n$

Jika  $p \mid a_2$ , maka  $p \mid a$  untuk suatu  $i = 2$

Jika  $p \mid a_2$ , maka  $P \mid a_3 a_4 \dots a_n$  atau  $p \mid a_3 (a_4 a_5 \dots a_n)$ , sehingga  $p \mid a_3$  atau  $p \mid a_4 a_5 \dots a_n$ .

Demikian seterusnya sehingga diperoleh :

$p \mid a_{n-1} a_n$ , berarti  $p \mid a_{n-1}$  atau  $p \mid a_n$

Jadi  $p \mid a$  untuk suatu  $1 \leq i \leq n$ .

### Dalil 28 (Teororema Dasar Aritmetika)

Jika  $n$  adalah sebarang bilangan bulat positif lebih dari 1, maka  $n$  dapat dinyatakan seara tunggal sebagai hasil kali faktor-faktor prima (bilangan prima dipandang sebagai hasil kali satu faktor)

Bukti

Ambil  $n \in \mathbb{Z}$  dan  $n > 1$ , maka  $n$  adalah suatu bilangan prima atau  $n$  adalah suatu bilangan komposit.

Jika  $n$  adalah suatu bilangan prima, maka sudah terbukti bahwa  $n$  mempunyai faktor prima  $n$ .

Jika  $n$  bilangan komposit, maka tentu ada bilangan-bilangan bulat  $n_1, n_2$ , dengan  $(1 < n_1, n_2 < n)$  sehingga  $n = n_1 n_2$ .



Jika  $n_1$  dan  $n_2$  keduanya adalah bilangan prima, maka sudah terbukti  $n$  mempunyai faktor prima. Dalam hal yang lain, ada bilangan-bilangan bulat  $n_2, n_2, n_3$  dengan ( $1 < n_1, n_2, n_3 < n$ ) sehingga  $n = n_1 n_2 n_3$ .

Demikian seterusnya sehingga :

$$1 < n_1, n_2, n_3, \dots, n_k < n_1 \quad n = n_1 n_2 \dots n_k$$

dengan  $n_1, n_2, \dots, n_k$  adalah bilangan-bilangan prima.

Untuk menunjukkan ketunggalan pemfaktoran prima, dimisalkan pemfaktoranannya tidak tunggal, yaitu :

$$n = p_1 p_2 \dots p_k \quad \text{dan} \quad n = q_1 q_2 \dots q_m, \quad p_1 \text{ adalah bilangan-bilangan prima, } p_1 \mid n \text{ berarti } p_1 \mid q_1 q_2 \dots q_m.$$

Karena  $p_1$  adalah suatu bilangan prima, maka  $p_1 \mid q_j$  untuk suatu  $1 \leq j \leq m$

Selanjutnya, karena  $q_1$  juga suatu bilangan prima, yaitu suatu bilangan yang hanya mempunyai faktor 1 dan  $q_1$ , maka jelas bahwa  $p_1 = q_1$ .

$$(n = p_1 p_2 \dots p_k \quad \text{dan} \quad n = q_1 q_2 \dots q_m) \rightarrow p_1 p_2 \dots p_k = q_1 q_2 \dots q_m$$

Misalkan tempat  $q_1$  di  $q_1$ , maka  $p_1 = q_1$ , sehingga diperoleh :

$$p_2 p_3 \dots p_k = q_2 q_3 \dots q_m$$

Jika proses yang sama dilakukan, maka akan diperoleh :

$$p_2 = q_2, \quad p_3 = q_3, \quad p_4 = q_4 \dots$$

Jika  $k < m$ , maka diperoleh :

$$1 = q_{k+1} q_{k+2} \dots q_m$$

Hal ini tidak mungkin terjadi sebab tidak ada bilangan-bilangan prima yang hasil kalinya sama dengan 1, sehingga terjadi kontradiksi.

Jadi tidak mungkin  $k < m$  dan tidak mungkin  $k > m$ , dengan demikian  $k = m$  yaitu pemfaktoran  $n$  adalah tunggal.

### Contoh 18

Misalkan pemfaktoran prima dari  $x$  dan  $y$  adalah :

$$x = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$$

$$y = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$$

Banyaknya faktor disamakan (diberi indeks sama) dengan pengertian bahwa nilai pangkat ( $m$ , atau  $n_1$ ) bisa nol.

- a. Jika  $\min(x, y)$  menyatakan bilangan yang terkecil dari  $x$  dan  $y$ , maka dapat ditentukan bahwa :

$$(x, y) = p_1^{\min(m_1, n_1)} p_2^{\min(m_2, n_2)} p_k^{\min(m_k, n_k)}$$

Keadaan ini diakibatkan oleh :

Jika  $p_i =$  faktor dari  $x$  dan  $p_i^m$  faktor dari  $y$ , maka faktor persekutuan terbesar  $x$  dan  $y$  adalah :

$p_i^m$  jika  $m \leq n$ ,

$p_i^n$  jika  $n \leq m$ ,

Sehingga faktor persekutuan terbesar dari  $x$  dan  $y$  mempunyai faktor dan bentuk :

$$p_i^{\min(m, n)}$$

- b. Jika faktor persekutuan bilangan yang terbesar dari  $x$  dan  $y$ , maka ditentukan bahwa :

$$(x, y) = p_1^{\max(m_1, n_1)} p_2^{\max(m_2, n_2)} p_k^{\max(m_k, n_k)}$$

Keadaan ini diakibatkan oleh :

Jika suatu bilangan merupakan kelipatan dari  $x$  dan  $y$ , maka bilangan itu membuat faktor.

$$p_i^{n_i} \text{ jika } m \leq n,$$

$$p_i^{m_i} \text{ jika } n \leq m,$$

Sehingga kelipatan persekutuan terkecil dari  $x$  dan  $y$  mempunyai faktor

dalam bentuk :  $p_i^{\max(m_i, n_i)}$

Contoh :

Carilah  $(x, y)$  dan  $[x, y]$  jika  $x = 6482700$  dan  $y = 1029000$

$$\text{Jawab : } x = 6482700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^4$$

$$y = 1029000 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^3 \cdot 7^3$$

$$(x, y) = 2^{\min(2, 3)} \cdot 3^{\min(3, 1)} \cdot 5^{\min(2, 3)} \cdot 7^{\min(4, 3)}$$

$$= 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^3$$

$$= 102900$$

$$[x, y] = 2^{\max(2, 3)} \cdot 3^{\max(3, 1)} \cdot 5^{\max(2, 3)} \cdot 7^{\max(4, 3)}$$

$$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^4$$

$$= 64827000$$

Contoh :

Tunjukkan pemfaktoran prima dari 24 dan 36

Jawab: Cara memfaktorkan prima suatu bilangan adalah menyatakan bilangan itu sebagai perkalian dua bilangan, sehingga diperoleh dua faktor. Selanjutnya, faktor-faktor yang belum merupakan bilangan prima difaktorkan lagi. Karena kemungkinan ada banyak cara dalam setiap langkah memfaktorkan, maka kemungkinan juga terjadi banyak cara dalam melaksanakan pemfaktoran prima. Misalnya, pemfaktoran prima dari 24 dilakukan dengan tiap cara seperti diagram berikut :

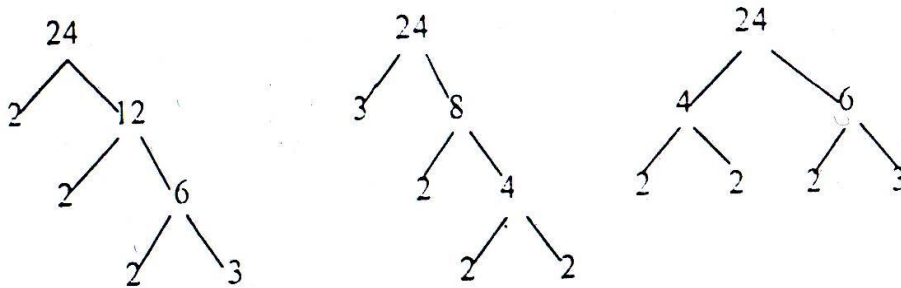
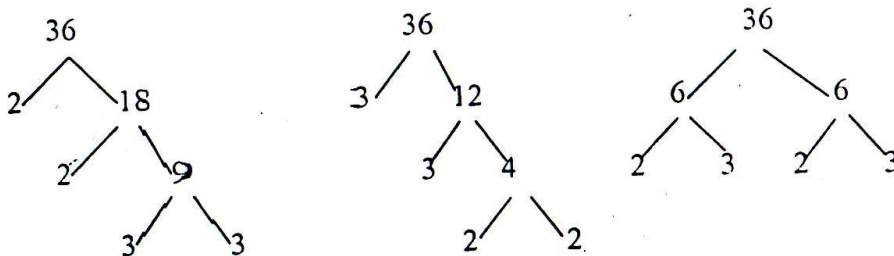


Diagram di atas disebut diagram pohon. Meskipun ada tiga diagram pohon, maka hasil pemfaktoran prima adalah sama, yaitu :

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^1$$

Sehingga jelas bahwa pemfaktoran prima 24 adalah tunggal

Diagram pohon dari pemfaktoran prima 36 adalah :



dari empat diagram tersebut menghasilkan sama, yaitu :

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

## Contoh 21

Cara lain pemfaktoran prima suatu bilangan adalah pembagian berulang (repeated division), yaitu secara berturut-turut membagi bilangan itu dengan bilangan-bilangan prima 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, .....

Misalnya pemfaktoran prima 37800 dan 44100 dilakukan sebagai berikut:

2	37800
2	18900
2	9450
3	4725
3	1575
3	525
5	175
5	35
	7

2	44100
2	22050
3	11025
3	3675
5	1225
5	245
7	49
	7

Sehingga diperoleh :

$$37800 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \text{ dan } 44100 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

**LATIHAN**

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, silakan Anda mengerjakan latihan berikut ini!

- Dalam membuat daftar bilangan prima kurang dari  $n \in \mathbb{N}$  (dengan menggunakan cara saringan Erastosthenes), tentukan bilangan prima terbesar sehingga pencoretan berhenti untuk  $n =$ 
  - 300
  - 400
  - 700
- Salinlah program komputer pada bab ini, dan kemudian jalankan. Tunjukkan hasil keluaran (printed out) jika
  - $n = 100$
  - $n = 500$
- Buktikan  $\sqrt{p}$  adalah bilangan irasional untuk sebarang bilangan prima  $p$ !

4. Bentuk pemfaktoran prima yang tunggal dari suatu bilangan disebut bentuk kanonik. Tentukan bentuk kanonik dari ...
  - a. 11011
  - b. 55125
  - c. 10!
  - D. 10!
5. Carilah (a,b) dan [a,b] jika :
  - a. a = 66 dan b = 48
  - b. a = 315 dan b = 350
  - c. a = 1001 dan b = 8085
  - d. a = 7425 dan b = 7875
6. Carilah (a, b, c) dan [a, b, c] jika :
  - a. a = 24, b = 36, c = 120
  - b. a = 12, b = 18, c = 30
7. Buktikanlah: untuk sebarang a, b, c ∈ Z dan bilangan prima p, jika  $p \mid a^2 + b^2$  dan  $p \mid b^2 + c^2$ , maka  $p \mid a + c$  atau  $p \mid a - c$ .
8. Carilah banyaknya faktor positif dari sebarang  $n \in \mathbb{Z}^+$
9. Carilah banyaknya faktor positif dari n jika :
  - a. n = 148500
  - b. n = 2520000
10. Buktikan bahwa setiap bilangan prima yang mempunyai bentuk  $3k + 1$  juga dalam bentuk  $6k + 1$ !

## RANGKUMAN

Dari seluruh uraian pada Kegiatan Belajar 2 ini dapat dirangkum hal-hal sebagai berikut :

1. Bilangan prima dan bilangan komposit.
  - a. Definisi : bilangan prima adalah bilangan asli lebih dari 1 yang tepat mempunyai dua faktor. Bilangan asli lebih dari 1 yang mempunyai lebih dari dua faktor disebut bilangan komposit
  - b. Memperoleh bilangan prima.
    - b.1 dengan menggunakan saringan Erastosthenes untuk membuat daftar bilangan prima kurang dari atau sama dengan  $n \in \mathbb{Z}^*$ , dilakukan melalui proses pencoretan kelipatan  $p \leq \sqrt{n}$ .
    - b.2 dengan menggunakan program komputer untuk membuat daftar bilangan prima kurang dari atau sama dengan  $n \in \mathbb{Z}^*$ .
    - b.3 dengan menggunakan rumus  $f(n) = n^2 - n + 41$  untuk  $1 \leq n \leq 40$ .
    - b.4 dengan menggunakan rumus  $f(n) = n^2 - 79n + 1601$  untuk  $1 \leq n \leq 80$ .

b.5 dengan menggunakan rumus  $f(n) = 2^2 + 1$  untuk  $n = 1, 2, 3, 4$ .

## 2. Keterbagian

- Jika  $n \in \mathbb{Z}^*$  dan  $n$  adalah komposit, maka ada bilangan prima  $p$  sehingga  $p \mid n$ .
- Jika  $p$  adalah suatu bilangan prima dan  $p \mid ab$ , maka  $p \mid a$  atau  $p \mid b$ .
- Banyaknya bilangan prima adalah tak terhingga.

## 3. Pemfaktoran prima

- Jika  $p$  adalah suatu bilangan prima dan  $p \mid a_1 a_2 \dots a_n$ , maka  $p \mid a_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).
- Sebarang bilangan bulat positif lebih dari 1 dapat dinyatakan secara tunggal sebagai hasil kali faktor-faktor prima (Teorema Dasar Aritmetika).

## 4. FPB dan KPK

Jika  $x = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$  dan  $y = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$

Maka :

- $(x, y) = p_1^{\min(m_1, n_1)} p_2^{\min(m_2, n_2)} \dots p_k^{\min(m_k, n_k)}$
- $[x, y] = p_1^{\max(m_1, n_1)} p_2^{\max(m_2, n_2)} \dots p_k^{\max(m_k, n_k)}$

Pemfaktoran prima dari  $x$  dan  $y$  dapat diperoleh dengan pembagian berulang.

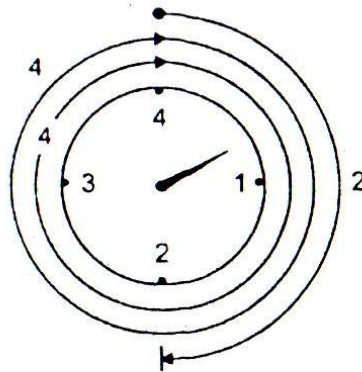
## E. KONGRUENSI

Secara implisit pengertian kongruensi sudah tercantum dalam buku-buku teks di SD, yaitu mewujudkan dalam bentuk bilangan jam. Peragaan dengan menggunakan gambar jam dirasakan bermanfaat karena para **bilangan jam**, antara lain bilangan jam dua-an, bilangan jam tiga-an, dan bilangan jam empat-an.

Bilangan jam empat-an menggunakan lambang 1, 2, 3, dan 4, dan himpunan bilangan jam empat-an dapat ditunjukkan dengan :

$$J_4 = (1, 2, 3, 4)$$

Bilangan-bilangan bulat selain unsur  $J_4$  dapat ditunjukkan senilai dengan unsur-unsur  $J_4$ , yaitu dapat diperagakan menggunakan “jam tiruan” yang angka – angkanya 1, 2, 3, dan 4, melalui hitungan jarum jam yang digerakkan melingkar. Misalnya 10 ditunjukkan dengan  $4 + 4 + 2$ , diperoleh 2.



Gambar 2.1

Bilangan yang serupa dengan bilangan jam adalah bilangan babo. Bilangan jam empatan menggunakan angka-angka 1, 2, 3, 4 dan bilangan babe empatan menggunakan angka-angka 0, 1, 2, dan 3, dan himpunan bilangan babo 4 ditunjukkan dengan :

$$M_4 = (0, 1, 2, 3)$$

Operasi bilangan babo misalnya bilangan babo 4, serupa dengan bilangan jam empatan, yaitu secara faktual dapat ditunjukkan dengan jam empatan dengan mengganti angka 4 menjadi angka 0. berdasarkan pengoperasian melalui gerakan melingkar berulang ini dapat diperoleh keadaan yang serupa dengan **pengurangan** berulang, misalnya 11 senilai 3 karena  $11 - 4 - 1 = 11 - 2 \cdot 4 = 3$ , sehingga dapat dikatakan bahwa 3 merupakan sisa dari pengurangan 11 dengan kelipatan dari 4, berarti sesuai dengan sisa pembagian 11 dan 4, yaitu 3.

### Definisi 6

Misalkan  $a, b \in \mathbb{Z}$  dan  $m \in \mathbb{Z}^+$

a disebut kongruen dengan b babo m, dituliskan  $a = b \pmod{m}$ , jika dan hanya jika  $m \mid a-b$ .

Jika  $m \nmid a-b$ , maka a tidak kongruen dengan b babo m, ditulis  $a \not\equiv b \pmod{m}$

Contoh 22

1.  $10 = 2 \pmod{4}$  sebab  $4 \mid 10-2$  atau  $4 \mid 8$
2.  $12 = -6 \pmod{9}$  sebab  $9 \mid 12-(-6)$  atau  $9 \mid 18$
3.  $-15 = 35 \pmod{10}$  sebab  $10 \mid -15-35$  atau  $10 \mid -50$
4.  $6 \not\equiv 3 \pmod{4}$  sebab  $4 \nmid 6-3$  atau  $4 \nmid 3$
5.  $12 \not\equiv -3 \pmod{6}$  sebab  $6 \nmid 12-(-3)$  atau  $6 \nmid 15$

Dalam kehidupan sehari-hari terdapat beberapa keadaan yang serupa dengan masalah kongruensi. Misalnya, kerja, arloji mengikuti aturan babo 12 untuk jam, dan babo 60 untuk menyatakan menit dan detik. Selanjutnya, kerja kalender mengikuti aturan babo 5 untuk hari-hari pasaran di Jawa (Pon, Wage, Kliwon, Legi, Phing), dan menggunakan aturan babo 12 untuk bulan-bulan dalam satu tahun. Beberapa dalil yang merupakan sifat-sifat dasar kongruensi (kekongruenan) adalah sebagai berikut :

Dalil 29 :

1.  $a = a \pmod{m}$  untuk semua  $a \in \mathbb{Z}$  (sifat refleksi)
2.  $a = b \pmod{m}$  jika dan hanya jika  $b = a \pmod{m}$  untuk semua  $a, b \in \mathbb{Z}$  (sifat simetris)
3. Jika  $a = b \pmod{m}$  dan  $b = c \pmod{m}$  maka  $a = c \pmod{m}$  untuk semua  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  (sifat transitif)
4. Jika  $a = b \pmod{m}$ , maka  $ax = bx \pmod{m}$  untuk semua  $a, b, x \in \mathbb{Z}$
5. Jika  $a = b \pmod{m}$ , dan  $c = d \pmod{m}$ , maka  $a + c = b + d \pmod{m}$  untuk semua  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ .
6. Jika  $a = b \pmod{m}$ , dan  $c = d \pmod{m}$ , maka  $ac = bd \pmod{m}$  untuk semua  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ .



7. Jika  $a = b \pmod{m}$ , maka  $ax = bx \pmod{mx}$  untuk semua  $a, b, c \in \mathbb{Z}$
8. Jika  $a = b \pmod{m}$ , dan  $n|m$ , maka  $a = b \pmod{n}$  untuk semua  $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Bukti :

1.  $m \mid 0$ , maka  $m \mid a-a$ , sehingga menurut Definisi 6,  $a = a \pmod{m}$
2.  $a = d \pmod{m}$ , maka menurut Definisi 6,  $m \mid a-b$ , dan menurut Definisi 1, ada  $t \in \mathbb{Z}$  sehingga  $a-b = mt$   
 $a-b = mt$ , maka  $b-a = m(-t)$  dengan  $-t \in \mathbb{Z}$ , sehingga sesuai dengan definisi 1,  $m \mid b-a$ , dan sesuai dengan Definisi 6,  $b = a \pmod{m}$
3.  $a = b \pmod{m}$  dan  $b = c \pmod{c}$ , maka menurut Definisi 6,  $m \mid a-b$  dan  $m \mid b-c$   $m \mid a-b$  dan  $m \mid b-c$ , maka menurut Dalil 5,  $m \mid (a-b) + (b-c)$ , atau  $m \mid a-c$ ,  $m \mid a-c$ , maka menurut Definisi 6,  $a = c \pmod{m}$ .
4.  $a = b \pmod{m}$ , maka menurut Definisi 6,  $m \mid a-b$   
 $m \mid a-b$ , maka menurut Dalil 1,  $m \mid (a-b)x$  untuk sebarang  $x \in \mathbb{Z}$ ,  
 $m \mid (a-b)x$  atau  $m \mid ax-bx$ , maka menurut Definisi 6,  $ax = bx \pmod{m}$
5.  $a = b \pmod{m}$  dan  $c = d \pmod{m}$ , maka menurut Definisi 6,  $m \mid a-b$  dan  $m \mid c-d$ , maka menurut Dalil 5,  $m \mid (a-b) + (c-d)$ , atau  $m \mid (a+c)-(b+d)$ .  
 $m \mid (a+b)-(b+d)$ , maka menurut Definisi 6,  $a + c = b + d \pmod{m}$
6. Bukti lihat latihan 3
7. Bukti lihat latihan 3
8. Bukti lihat latihan 3

### Contoh 23

Carilah satu angka dan dua angka terakhir lambang bilangan desimal dari  $2^{500}$

Jawab :

Masalah ini dapat ditulis dalam bentuk kongruensi, yaitu mencari nilai  $x$  dan

$y$  ( $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 100$ ) sehingga  $2^{500} = x \pmod{10}$  dan  $2^{500} = y \pmod{100}$

$$2 = 2 \pmod{10} \qquad 2^{32} = 36 \pmod{10} = 6 \pmod{10}$$

$$2^2 = 4 \pmod{10} \qquad 2^{64} = 36 \pmod{10} = 6 \pmod{10}$$

$$2^4 = 16 \pmod{10} = 6 \pmod{10} \qquad 2^{128} = 36 \pmod{10} = 6 \pmod{10}$$

$$2^8 = 36 \pmod{10} = 6 \pmod{10} \qquad 2^{256} = 36 \pmod{10} = 6 \pmod{10}$$

$$\begin{aligned}
2^{16} &= 36(\bmod 10) = 6(\bmod 10) \\
2^{500} &= 2^{250+128+64+32+16+4} = 2^{256} \cdot 2^{128} \cdot 2^{64} \cdot 2^{32} \cdot 2^{16} \cdot 2^4 \\
&= 6.6.6.6.6.6(\bmod 10) = 36.36.36(\bmod 10) \\
&= 6.6.6(\bmod 10) = 216(\bmod 10) = 6(\bmod 10)
\end{aligned}$$

Satu angka terakhir lambang bilangan desimal dari  $2^{500}$  adalah 6.

Selanjutnya :

$$\begin{aligned}
2 &= 2(\bmod 100) \\
2^2 &= 4(\bmod 100) \\
2^4 &= 16(\bmod 100) \\
2^8 &= 256(\bmod 100) = 56(\bmod 100) \\
2^{16} &= 3136(\bmod 100) = 36(\bmod 100) \\
2^{32} &= 1296(\bmod 100) = 96(\bmod 100) = -4(\bmod 100) \\
2^{64} &= 16(\bmod 100) \\
2^{128} &= 256(\bmod 100) = 56(\bmod 100) \\
2^{256} &= 3136(\bmod 100) = 36(\bmod 100) \\
2^{500} &= 2^{256+128+64+32+16+4} = 2^{250} \cdot 2^{128} \cdot 2^{64} \cdot 2^{32} \cdot 2^{16} \cdot 2^4 \\
&= 36.56.16.96.36.16(\bmod 100) \\
&= 36^2 \cdot 16^2 \cdot 56.96(\bmod 100) = 1296.256.56.96(\bmod 100) \\
&= 96.56.56.96(\bmod 100) = 56^2 \cdot 96^2(\bmod 100) \\
&= 36.16(\bmod 100) = 576(\bmod 100) = 76(\bmod 100)
\end{aligned}$$

Dua angka terakhir lambang bilangan desimal dari  $2^{500}$  adalah 76.

*Dalil 30*

Misalkan  $a, x, y \in \mathbb{Z}$  dan  $m, m_1, m_2 > 0$

$$ax = ay \pmod{m} \text{ jika dan hanya jika } x = y \left( \bmod \frac{m}{a, m} \right)$$

$ax = ay \pmod{m}$  dan  $(a, m) = 1$  jika dan hanya jika  $x = y \pmod{m}$

$x = y \pmod{m_1}$  dan  $x = y \pmod{m_2}$  jika dan hanya jika  $x = y \pmod{[m_1, m_2]}$

Bukti :

1. ( $\rightarrow$ )

$ax = ay \pmod{m}$ , maka menurut Definisi 6 dan Definisi 1, ada  $k \in \mathbb{Z}$  sehingga  $ax - ay = mk$  atau  $a(x-y) = mk$

Misalkan  $d = (a,m)$ , maka menurut Definisi 3,  $d|a$  dan  $d|m$ , dan menurut

$$\text{Dalil 13, } \left( \frac{a}{d}, \frac{m}{d} \right) = 1$$

$d|a$  dan  $d|m$ , maka menurut definisi 1, ada  $r, s \in \mathbb{Z}$  sehingga  $a = dr$ ,  $m =$

$$ds, \text{ dan } (r,s) = \left( \frac{a}{d}, \frac{m}{d} \right) = 1$$

$a(x-y) = mk$ ,  $a = dr$ , dan  $m = ds$ , maka  $dr(x-y) = dsk$ , atau  $r(x-y) = sb$ ,  
 $r(x-y) = sk$ , maka menurut Definisi 1,  $s|r(x-y)$

$(s,r) = (r,s) = 1$  dan  $s|r(x-y)$ , maka menurut Dalil 14,  $s|x-y$ , dan menurut

$$\text{Definisi 6, } x = y \pmod{s} \text{ atau } x = y \left( \text{mod } \frac{m}{d} \right), \text{ atau } x = y \left( \text{mod } \frac{m}{(a,m)} \right)$$

(terbukti)

( $\leftarrow$ )

$$x = y \left( \text{mod } \frac{m}{(a,m)} \right), \text{ maka menurut dalil 29.7, } ax = ay \left( \text{mod } \frac{m}{(a,m)} \right)$$

$$ax = ay \left( \text{mod } \frac{m}{(a,m)} \right) \text{ dan } m \mid \frac{am}{(a,m)}, \text{ maka menurut Dalil 29.8, } ax =$$

$ay \pmod{m}$  terbukti.

2. Gunakan hasil butir 1, gantilah  $(a,m)$  dengan 1

3. ( $\rightarrow$ )

$x = y \pmod{m_1}$  dan  $x = y \pmod{m_2}$ , maka menurut Definisi 6,  $m_1 \mid x-y$   
dan  $m_2 \mid x-y$ , sehingga menurut Definisi 4,  $x-y$  adalah kelipatan  
persekutuan dari  $m_1$  dan  $m_2$ , dan menurut Dalil 19  $[m_1, m_2] \mid x-y$ .

( $\leftarrow$ )

$$x = y \left( \leftarrow \right)$$

menurut definisi 4,  $m_1 \mid [m_1, m_2]$   $[m_1, m_2]$

$m_1 \mid [m_1, m_2]$  dan  $x = y \pmod{[m_1, m_2]}$ , maka menurut Dalil 29.,

$x = y \pmod{m_1}$

$m_2 \mid (m_1, m_2)$  dan  $x = y \pmod{[m_1, m_2]}$ , maka menurut Dalil 29.8,

$x = y \pmod{m_2}$  (terbukti)

*Dalil 31*

Misalkan  $x, y, m \in \mathbb{Z}$  dan  $m > 0$

Jika  $x = y \pmod{m}$ , maka  $(x, m) = (y, m)$

Bukti :

$x = y \pmod{m}$ , maka menurut Definisi 6,  $m \mid x - y$

Menurut Definisi 3,  $(x, m) \mid m$  dan  $(x, m) \mid x$

$(x, m) \mid m$  dan  $m \mid x - y$ , maka menurut Dalil 2,  $(x, m) \mid x - y$

$(x, m) \mid x$  dan  $(x, m) \mid x - y$ , maka menurut Dalil 9,  $(x, m) \mid y$

$(x, m) \mid m$  dan  $(x, m) \mid y$ , maka menurut Definisi 3,  $(x, m)$  adalah faktor persekutuan  $m$  dan  $y$ , dan menurut Dalil 16,  $(x, m) \mid (y, m)$

Dengan jalan yang sama dapat ditunjukkan bahwa  $(y, m) \mid (x, m)$

$(x, m) \mid (y, m)$ ,  $(y, m) \mid (x, m)$ ,  $(x, m) > 0$ ,  $(y, m) > 0$ , maka menurut Dalil 4,  $(x, m) = (y, m)$ . (terbukti)

Contoh :

1.  $4x = 4y \pmod{6}$  dan  $(4, 6) = 2$ , maka  $x = y \left( \pmod{\frac{6}{(4, 6)}} \right)$  atau  $x = y \pmod{3}$

2.  $6x = 6y \pmod{15}$  dan  $(6, 15) = 3$ , maka  $x = y \left( \pmod{\frac{15}{(6, 9)}} \right)$  atau  $x = y \pmod{5}$

3.  $3x = 3y \pmod{4}$  dan  $(3, 4) = 1$ , maka  $x = y \left( \pmod{\frac{3}{(3, 4)}} \right)$  atau  $x = y \pmod{4}$

4.  $30 = 12 \pmod{9}$ , ternyata  $10 \not\equiv 4 \pmod{9}$ , dan  $5 \not\equiv 2 \pmod{9}$

Perhatikan bahwa ruas kiri dan ruas kanan tidak begitu saja bisa dikeluarkan faktor-faktor persekutuannya, selanjutnya,  $15 = 6 \pmod{6}$

karena  $2 \cdot 15 = 2 \cdot 6 \pmod{9}$  sehingga  $15 = 6 \left( \pmod{\frac{9}{(2, 9)}} \right)$  atau  $15 = 6 \pmod{9}$ .

Contoh :

1.  $25 = 15 \pmod{10}$ ,  $(25, 10) = (15, 10) = 5$

2.  $42 = 14 \pmod{7}$ ,  $(42,7) = (14,7) = 7$
3.  $100 = 12 \pmod{8}$ ,  $(100,8) = (12,8) = 4$

### Definisi 7

Jika  $y = x \pmod{m}$ , maka  $x$  disebut residu dari  $y$  babo  $m$

Jika  $0 \leq x \leq m-1$  dan  $y = x \pmod{m}$ , maka  $x$  disebut residu terkecil dari  $y$  babo  $m$ .

### Definisi 8

Suatu himpunan  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  disebut suatu sistem residu yang lengkap babo  $m$  jika dan hanya jika untuk setiap  $0 \leq y \leq m$  ada satu dan hanya satu  $x_i (1 \leq x_i \leq m)$  sehingga  $y = x_i \pmod{m}$

### Contoh 26

1. Himpunan  $(11, 12, 13, 14, 15)$  adalah sistem residu yang lengkap babo 5 sebab untuk setiap  $0 \leq y \leq m$  ada satu dan hanya satu  $x_i \in (11, 12, 13, 14, 15)$  sehingga :

$$\begin{array}{lll} 0 = 15 \pmod{5} & 2 = 12 \pmod{5} & 4 = 14 \pmod{5} \\ 1 = 11 \pmod{5} & 3 = 13 \pmod{5} & \end{array}$$

2. Himpunan  $(18, 33, 46, 63)$  adalah suatu sistem residu yang lengkap babo 4 sebab untuk setiap  $0 \leq y < 4$  adalah satu dan hanya satu  $x_i \in (8, 33, 46, 63)$  sehingga :

$$\begin{array}{ll} 0 = 8 \pmod{4} & 2 = 46 \pmod{4} \\ 1 = 33 \pmod{4} & 3 = 13 \pmod{4} \end{array}$$

3. Himpunan  $(-33, -13, 14, 59, 32, 48, 12)$  adalah suatu sistem residu yang lengkap babo 7 sebab untuk setiap  $0 \leq y < 7$  ada satu dan hanya satu  $x_i \in (-33, -13, 14, 59, 32, 48, 12)$  sehingga :

$$\begin{array}{lll} 0 = 14 \pmod{7} & 3 = 59 \pmod{7} & 6 = 48 \pmod{7} \\ 1 = -13 \pmod{7} & 4 = 59 \pmod{7} & \\ 2 = -33 \pmod{7} & 5 = 12 \pmod{7} & \end{array}$$

4. Himpunan  $(-12, 13, 20, 45, 77)$  adalah bukan suatu sistem residu yang lengkap babo 3 sebab untuk setiap  $0 \leq y < 3$  ada lebih dari satu  $x_i \in (10, -5, 27)$  yaitu  $x_1 = 10$  dan  $x_2 = -5$  sehingga :

$$1 = 10 \pmod{3} \text{ atau } 1 = x_1 \pmod{3}$$

$$1 = -5 \pmod{3} \text{ atau } 1 = x_2 \pmod{3}$$

5. Himpunan  $(-12, 13, 20, 45, 77)$  adalah bukan suatu sistem residu yang lengkap babo 6 sebab untuk  $0 \leq y < 6$  ada satu  $y = 4$  dimana :  
 $y \notin x_1, x_2, \in (-12, 13, 20, 45, 77)$  karena :

$$0 = -12 \pmod{6} \quad 2 = 20 \pmod{6} \quad 5 = \pmod{6}$$

$$1 = 13 \pmod{6} \quad 3 = 45 \pmod{6}$$

### Definisi 9

Suatu himpunan  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  disebut suatu sistem residu tereduksi babo  $m$  jika dan hanya jika :

- 1)  $(x_i, m) = 1, 1 \leq i \leq k$
- 2)  $x_i \not\equiv x_j \pmod{m}$  untuk setiap  $i \neq j$
- 3) jika  $(y, m) = 1$ , maka  $y = x_i \pmod{m}$  untuk suatu  $1 \leq i \leq k$

### Contoh 27

1. Himpunan  $(1, 3, 5, 7)$  adalah suatu sistem residu tereduksi babo  $m$  jika dan hanya jika.
  1.  $(1,8) = 1, (3,8) = 1, (5,8) = 1, \text{ dan } (7,8) = 1$
  2.  $1 \not\equiv 3 \pmod{8}, 1 \not\equiv 5 \pmod{8}, 1 \not\equiv 7 \pmod{8}, 3 \not\equiv 5 \pmod{8}, 3 \not\equiv 7 \pmod{8}, \text{ dan } 5 \not\equiv 7 \pmod{8}.$
  3.  $(13,8) = 1$ , maka  $13 = 5 \pmod{8}$   
 $(23,8) = 1$ , maka  $23 = 7 \pmod{8}$
2. Himpunan  $(9,31)$  adalah suatu sistem residu tereduksi babo 4 sebab :
  1.  $(9,4) = 1 \quad (31,4) = 1$
  2.  $9 \not\equiv 31 \pmod{4}$
  3.  $(15,4) = 1$ , maka  $15 = 31 \pmod{4}$   $(29,4) = 1$ , maka  $29 = 9 \pmod{4}$
3. Himpunan  $(1,2,5)$  adalah bukan suatu sistem residu tereduksi babo 6 sebab  $(2,6) =$   
 $2 \neq 1$

4. Himpunan  $(1,21,17,-1)$  adalah bukan suatu sistem residu tereduksi babo 10 sebab  $21 = 1 \pmod{10}$

### Contoh 28

Berilah masing-masing satu contoh sistem residu yang lengkap dan yang tereduksi babo 12.

Jawab : Karena setiap bilangan  $0 \leq y < 12$  hanya kongruen dengan dirinya sendiri, maka himpunan  $(0, 1, 2, \dots, 11)$  merupakan satu contoh sistem residu yang lengkap babo 12. contoh yang lain dapat diperoleh bila setiap unsur  $(0, 1, 2, \dots, 11)$  ditambah dengan  $12k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Karena setiap dua bilangan  $0 \leq y < 12$  tidak kongruen babo 12, maka sistem residu yang tereduksi dapat diperoleh dari sistem residu yang lengkap dengan **membuang** atau **mengeluarkan** unsur-unsur

$$x_i, \in (0, 1, 2, \dots, 11) \text{ yang mana } (x_i \mid 12) \neq 1.$$

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

Contoh suatu sistem residu tereduksi babo 12 adalah  $(1,5,7,11)$ . Jika masing-masing unsur himpunan ini ditambah dengan  $12k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), misalnya  $(-11,17,-17,47)$ , maka diperoleh sistem residu tereduksi yang lain.

### Dalil 32

Misalkan  $(a,m) = 1$

Jika  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  adalah suatu sistem residu yang lengkap atau tereduksi babo  $m$ , maka  $(ax_1, ax_2, \dots, ax_k)$  juga merupakan suatu sistem residu yang lengkap atau tereduksi babo  $m$ .

Bukti :

Misalkan  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  adalah suatu sistem residu babo  $m$ , maka  $(x_i, m) = 1$  untuk setiap  $1 \leq i \leq k$ .  $(a,m) = 1$  dan  $(x_i, m) = 1$ , maka menurut Dalil 15,  $(ax_i, m) = 1$ . Dengan demikian unsur-unsur himpunan  $(ax_1, ax_2, \dots, ax_k)$  memenuhi hubungan  $(ax_i, m) = 1$  untuk setiap  $1 \leq i \leq k$ . Berikutnya perlu ditunjukkan bahwa  $ax_i \not\equiv ax_j \pmod{m}$  untuk setiap  $i \neq j$ . anggaplah  $ax_i = ax_j \pmod{m}$  untuk setiap  $i \neq j$ .

$ax_i = ax_j \pmod{m}$  dan  $(a,m) = 1$ , maka menurut Dalil 30.2,  $x_i = x_j \pmod{m}$ . Hal ini bertentangan dengan keadaan himpunan  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  yang merupakan suatu sistem residu tereduksi babo  $m$ , yaitu  $x_i \not\equiv x_j \pmod{m}$  jika  $i \neq j$ . Jadi  $ax_i \not\equiv ax_j \pmod{m}$  untuk setiap  $i \neq j$ .

Karena himpunan  $(ax_1, ax_2, \dots, ax_k)$  memenuhi hubungan  $(ax_i, m) = 1$  dan  $ax_i \not\equiv ax_j \pmod{m}$  untuk setiap  $i \neq j$ , maka himpunan  $(ax_1, ax_2, \dots, ax_k)$  merupakan sistem residu yang lengkap babo  $m$ .

### Contoh 29

1. Himpunan  $(1,5)$  adalah sistem residu tereduksi babo 6.
  - a.  $(5,6) = 1$  maka  $(5.1,4.5) = (5,25)$  juga merupakan sistem reduksi babo 6.
  - b.  $(7,6) = 1$  maka  $(7.1,7.5) = (7,35)$  juga merupakan sistem reduksi babo 6.
2. Himpunan  $(1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19)$  adalah suatu sistem residu tereduksi babo 20.
  - a.  $(3,20) = 1$ , maka  $(3, 9, 21, 27, 33, 39, 51, 57)$  juga merupakan sistem residu tereduksi babo 6.
  - b.  $(9,20) = 1$ , maka  $(9,27,63,81,99,117,153,171)$  juga merupakan sistem residu tereduksi babo 6

### Definisi 10

Misalkan residu dalam suatu sistem residu tereduksi bab  $m$  disebut fungsi  $\emptyset$  Euler dari  $m$ , ditulis dengan  $\emptyset(m)$ .

### Contoh 30

1. Himpunan  $(1)$  adalah suatu sistem residu tereduksi bab 2, maka  $\emptyset(2) = 1$
2. Himpunan  $(1,2)$  adalah suatu sistem residu tereduksi babo 3, maka  $\emptyset(3) = 2$
3. Himpunan  $(1,3)$  adalah suatu sistem residu tereduksi babo 4, maka  $\emptyset(4) = 2$
4. Himpunan  $(1,2,3,4)$  adalah suatu sistem residu babo 5, maka  $\emptyset(5) = 4$



5. Dengan menghitung banyaknya unsur dari suatu sistem residu tereduksi, maka dapat ditentukan bahwa  $\phi(16) = 8$ ,  $\phi(20) = 8$ , dan  $\phi(27) = 18$

### Dalil 33

Jika  $(a, m) = 1$ , maka  $a^{\phi(m)} = 1 \pmod{m}$

#### Bukti

Misalkan  $(x_1, x_2, \dots, x_{\phi(m)})$  adalah suatu sistem residu tereduksi babo  $m$ , dan  $(a, m) = 1$  maka menurut Dalil 32,  $(ax_1, ax_2, \dots, ax_{\phi(m)})$  juga merupakan suatu sistem residu tereduksi babo  $m$ , sehingga :

$y = x_i \pmod{m}$  dan  $y = ax_i \pmod{m}$  untuk setiap  $0 \leq y < m$

berarti  $ax_i = x_j \pmod{m}$  untuk suatu  $1 \leq i \leq \phi(m)$  dan suatu  $1 \leq j \leq \phi(m)$

Jika seluruh residu dari kedua residu dikalikan maka akan diperoleh :

$$ax_1 \cdot ax_2 \dots ax_{\phi(m)} = x_1 \cdot x_2 \dots x_{\phi(m)} \pmod{m}$$

$$a^{\phi(m)} \cdot ax_1 \cdot ax_2 \dots ax_{\phi(m)} = x_1 \cdot x_2 \dots x_{\phi(m)} \pmod{m}$$

Himpunan  $(x_1, x_2, \dots, ax_{\phi(m)})$  adalah suatu sistem residu tereduksi babo  $m$ ,

maka menurut Definisi 9,  $(x_i, m) = 1$  untuk setiap  $1 \leq i \leq \phi(m)$ , berarti :

$$(x_1, m) = (x_2, m) = (x_{\phi(m)}, m) = 1$$

dan menurut Dalil 15 (yang diperluas)

$$(x_1 x_2 \dots x_m, m) = 1$$

Karena  $(x_1 x_2 \dots x_m, m) = 1$  dan  $a^{\phi(m)} x_1 x_2 \dots x_{\phi(m)} = x_1 x_2 \dots x_{\phi(m)} \pmod{m}$

maka menurut Dalil 30.2

$$a^{\phi(m)} = 1 \pmod{m} \text{ (terbukti)}$$

### Contoh 31

1.  $\phi(6) = 2$ , maka

$$5^2 = 25 = 1 \pmod{6} \text{ sebab } (5, 6) = 1$$

$$7^2 = 49 = 1 \pmod{6} \text{ sebab } (7, 6) = 1$$

$$11^2 = 121 = 1 \pmod{6} \text{ sebab } (11, 6) = 1$$

$$4^2 = 16 \not\equiv 1 \pmod{6} \text{ sebab } (4, 6) = 2 \neq 1$$

$$8^2 = 64 \not\equiv 1 \pmod{6} \text{ sebab } (8,6) = 2 \neq 1$$

$$12^2 = 144 \not\equiv 1 \pmod{6} \text{ sebab } (12,6) = 6 \neq 1$$

2. Carilah nilai-nilai  $x$  yang memenuhi  $9^{101} = x \pmod{5}$ , dan  $0 \leq x < 5$

Jawab :  $\phi(5) = 4$

$(9,5) = 1$  dan  $\phi(5) = 4$ , maka menurut Dalil 33.

$$9^{\phi(5)} = 1 \pmod{5} \text{ atau } 9^4 = 1 \pmod{5}$$

Sehingga :

$$9^{101} = 9^{100} \cdot 9 = (9^4)^{25} \cdot 9 = 1 \cdot 9 = 9 \pmod{5} = 4 \pmod{5}$$

Jadi :  $x = 4$

3. Carilah satu angka terakhir lambang bilangan desimal dari  $7^{183}$ .

Jawab : Masalah ini sama dengan mencari  $x < x < 10$  sehingga  $7^{183} = x \pmod{10}$

$(7,10) = 1$ , maka menurut Dalil 33:

$$7^{\phi(10)} = 1 \pmod{10} \text{ atau } 7^4 = 1 \pmod{10}$$

sehingga :

$$7^{183} = 7^{180} \cdot 7^3 = (7^4)^{45} \cdot 7^3 = 1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \pmod{10} = 3 \pmod{10}$$

Jadi satu angka terakhir lambang bilangan desimal dari  $7^{183}$  adalah 3

4. Carilah dua angka terakhir lambang bilangan desimal dari  $3^{1003}$

Jawab: Masalah ini sama dengan mencari  $0 \leq x < 100$  sehingga

$$3^{1003} = x \pmod{100}$$

karena  $100 = 4 \cdot 25$  dan  $(4,25) = 100$ , maka menurut Dalil 30.3

$$3^{1003} = x \pmod{4} \text{ dan } 3^{1003} = x \pmod{25}, \text{ berarti}$$

$$3^2 = 1 \pmod{4} \text{ dan } 3^{20} = 1 \pmod{25}$$

Sehingga :

$$3^{1003} = (3^2)^{501} \cdot 3 = 1 \cdot 3 \pmod{4} = 3 \pmod{4}$$

$$3^{1003} = (3^{20})^{50} \cdot 3^3 = 1 \cdot 27 \pmod{25} = 2 \pmod{25}$$

$$3^{1003} = 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27 \pmod{4} \text{ dan } 3^{1003} = 2, 27 \pmod{25}$$

mempunyai nilai persekutuan 27 yang sama, berarti

$$3^{1003} = 27 \pmod{4} \text{ dan } 3^{1003} = 27 \pmod{25}$$

$$\text{sehingga } 3^{1003} = 27 \pmod{[4,25]} = 27 \pmod{100}.$$

Jadi  $x = 27$ , berarti dua angka terakhir lambang bulangan desimal  $3^{1003}$  adalah 27.

### Dalil 34

Jika  $(a, m) = 1$ , maka kongruen linear  $ax = b \pmod{m}$  mempunyai penyelesaian  $x = b \cdot a^{\phi(m)-1} \pmod{m}$

Bukti :

Menurut Dalil 33, jika  $(a, m) = 1$ , maka  $a^{\phi(m)} = 1 \pmod{m}$

$ax = b \pmod{m}$ , maka :

$$a \cdot a^{\phi(m)-1} \cdot x = b \cdot a^{\phi(m)-1} \pmod{m}$$

$$a^{\phi(m)} \cdot x = b \cdot a^{\phi(m)-1} \pmod{m}$$

$$x = b \cdot a^{\phi(m)-1} \pmod{m}$$

Jadi  $x = b \cdot a^{\phi(m)-1} \pmod{m}$  adalah penyelesaian  $ax = b \pmod{m}$

### Contoh 32

1.  $(5, 13) = 1$ , maka  $5x = 3 \pmod{13}$  mempunyai penyelesaian  
 $x = 3 \cdot 5^{\phi(13)-1} \pmod{13} = 3 \cdot 5^{11} \pmod{13} = 3(5^2)^5 \cdot 5 \pmod{13}$   
 $= 3(-1)^5 \cdot 5 \pmod{13} = -15 \pmod{13} = -2 \pmod{13} = 11 \pmod{13}$ .
2.  $(7, 24) = 1$ , maka  $7x = 5 \pmod{24}$  mempunyai penyelesaian  
 $x = 5 \cdot 7^{\phi(24)-1} \pmod{24} = 5 \cdot 7^7 \pmod{24} = 5(7^3)^2 \cdot 7 \pmod{24}$   
 $= 5 \cdot 1^2 \cdot 7 \pmod{24} = 35 \pmod{24} = 11 \pmod{24}$

## LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, silakan Anda mengerjakan latihan berikut ini!

1. Buktikan jika  $a = b \pmod{m}$  dan  $c = d \pmod{m}$ , maka  $ac = bd \pmod{m}$  untuk semua  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ .
2. Buktikan jika  $a = b \pmod{m}$ , maka  $ax = bx \pmod{mx}$  untuk semua  $a, b, x \in \mathbb{Z}$ .
3. Buktikan jika  $a = b \pmod{m}$  dan  $n|m$ , maka  $a = b \pmod{n}$  untuk semua  $a, b, n \in \mathbb{Z}$ .
4. Carilah 1 angka terakhir, 2 angka terakhir, 2 angka terakhir, dan 3 angka terakhir lambang bilangan desimal dari  $7^{739}$
5. Jika hari ini adalah Minggu, maka hari apakah :

- a.  $59^{219}$  hari yang akan datang
- b.  $27^{105}$  hari yang telah lalu
6. Tunjukkan jika  $N = (a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0) = a_6 \cdot 10^6 + a_5 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$  dan  $7|n$ , maka  $7|(a_0 + a_1 + a_2) - (a_3 + a_4 + a_5) + a_6$
7. Buktikan  $7|n^7 - n$  jika  $(n,7) = 1$
8. Tunjukkan bahwa  $(611 + 1) = 0 \pmod{71}$
9. Tunjukkan suatu bilangan asli  $N$  habis dibagi oleh 4 jika bilangan dua angka terakhir dari  $N$  habis dibagi oleh 4.
10. Tunjukkan jika  $N = (a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 a_1)$   $n$  genap dan  $11|N$ , maka  $11|(a_0 + a_2 + a_4 \dots + a_{n-1}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_n)$
11. Tunjukkan jika  $N = a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$  dan  $101 | N$ , maka  $101|(a_1 a_0) - (a_3 a_2) + (a_5 a_4) - a_6$  (cara ini dapat diperluas untuk sebarang  $N$ )
12. Tunjukkan bahwa  $101|175603931285$  dengan menggunakan cara pada butir 13.
13. Tunjukkan jika  $N = (a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0)$  dan  $13|N$ , maka  $13|(a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0) - 9a_0$

## F. PEMBELAJARAN FPB DAN KPK DI SEKOLAH DASAR

Operasi hitung adalah bagian yang penting dalam teori bilangan dan penggunaannya dalam kehidupan sehari – hari. Bilangan prima, komposit, faktor kelipatan, faktor persekutuan tersebar, dan kelipatan persekutuan terkecil dapat dipahami bila siswa telah memahami operasi perkalian dengan baik. Selain itu untuk menyajikan bahan ajar tersebut diatas.

### 1. Bilangan Genap dan Gasal

Kita telah mengenal bilangan bulat yaitu: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... Himpunan semua bilangan bulat bisa kita pilah menjadi dua himpunan bagian. Pertama disebut dengan himpunan bilangan genap yang terdiri

dari 0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, dan seterusnya. Anggota himpunan I bagian genap disebut bilangan genap. Himpunan bagian yang kedua disebut dengan himpunan bilangan gasal (ganjil), yang terdiri dari 1, -1, 3, -3, 5, -5, 7, -7, dan seterusnya. Anggota himpunan bilangan gasal disebut bilangan gasal.

Coba perhatikan bilangan genap di atas. Jika, masing-masing bilangan itu kita bagi dengan 2, maka kita memperoleh hasil bagi bilangan bulat tertentu tanpa ada sisanya sama sekali. Sebagai contoh, jika 16 dibagi dengan 2, maka diperoleh hasil bagi 8, dengan sisa 0. Demikian pula dengan bilangan-bilangan genap yang lain. Fakta bahwa setiap bilangan genap bila dibagi 2 tidak menghasilkan sisa, atau sisanya sama dengan 0, melahirkan konsep habis dibagi. Jika 16 habis dibagi dengan 2. 126 habis dibagi oleh 2. 128 habis dibagi dengan 2. secara umum setiap bilangan genap habis dibagi oleh 2, sehingga kita bisa mendefinisikan bilangan genap sebagai bilangan yang habis dibagi 2. Oleh karena itu, jika a bilangan genap maka  $a = 2k$  dengan bilangan bulat.

Bilangan gasal adalah bilangan bulat yang tidak genap. Secara umum, bilangan gasal dapat diperoleh dengan cara menambahkan bilangan genap dengan 1. karena -38 adalah bilangan genap, maka  $-38 + 1 = -37$  adalah bilangan gasal. Jadi, jika a bilangan gasal maka  $a = 2k + 1$ , dengan k bilangan bulat. Oleh karena itu,  $7 = 2(3) + 1$ , untuk bilangan gasal 7,  $k = 3$ .

Ada beberapa sifat yang menarik dari bilangan genap dan gasal ini.

#### 1) Sifat Bilangan Genap

Misalkan a dan b bilangan genap, maka  $a = 2k$  dan  $b = 2m$ , dengan k dan m bilangan bulat, sehingga  $a + b = 2k + 2m = 2(k + m)$ . Jadi, apabila a dan b bilangan genap, maka a + b juga bilangan genap.

Jumlah dua bilangan genap adalah genap
--

Sekarang jika kedua bilangan a dan b di atas kita kalikan maka  $a \times b = 2k \times 2m = 2 \times 2 \times k \times m = 2(2km)$ . Jadi, ab adalah bilangan genap, sehingga kita memperoleh sifat.

Bahwa

Hasil kali dua bilangan genap adalah bilangan genap

Misalkan  $a$  bilangan genap dan  $c$  bilangan bulat, maka  $ac = 2kc$ .  
Jadi,  $ac$  bilangan genap, sehingga kita peroleh sifat sebagai berikut:

Hasil kali bilangan genap dengan sembarang bilangan bulat adalah bilangan genap

## 2) Sifat Bilangan Gasal

Misalkan  $a$  dan  $b$  bilangan gasal, maka  $a + b = (2k + 1) + (2m + 1) = 2k + 2m + 2 = 2(k + m + 1)$ , sehingga  $a + b$  merupakan bilangan genap. Jadi, kita memperoleh sifat :

Jumlah dua bilangan ganjil adalah bilangan genap

Sekarang kita lihat hasil kali dua bilangan gasal diatas,  $ab = (2k + 1)(2m + 1) = 4km + 2k + 2m + 1 = 2(2km + k + m) + 1$ , sehingga  $ab$  merupakan bilangan gasal. Jadi kita memperoleh sifat

Hasil kali dua bilangan gasal adalah bilangan gasal

Sekarang misalkan  $a$  adalah bilangan gasal dan  $b$  bilangan genap, maka  $a = 2k + 1$  dan  $b = 2m$ , sehingga  $a + b = 2k + 1 + 2m = 2(k + m) + 1$  yang merupakan bilangan gasal. Sedangkan  $ab = (2k + 1)2m = 2(2k + 1)m$ . Jadi  $ab$  merupakan bilangan genap sehingga kita memperoleh sifat – sifat sebagai berikut:

Jumlah bilangan genap dan bilangan gasal adalah bilangan gasal  
Hasil kali bilangan genap dan bilangan gasal adalah bilangan genap

## 2. Bilangan Prima

Coba perhatikan beberapa bilangan ini : 2, 3, 5, dan 7.

$$2 = 1 \times 2$$

$$3 = 1 \times 3$$

$$5 = 1 \times 5$$

$$7 = 1 \times 7$$

Keempat bilangan tersebut mempunyai faktor 1 dan dirinya sendiri, tidak mempunyai faktor yang lain. Bilangan semacam ini disebut bilangan prima.  $11 = 1 \times 11$ , 11 tidak mempunyai faktor lain selain 1 dan 11, sehingga 11 adalah bilangan prima. Akan tetapi 4 adalah bukan bilangan prima, sebab selain  $4 = 1 \times 4$ , 4 juga dinyatakan dengan  $4 = 2 \times 2$  yang berarti 4 mempunyai faktor 1, 2, dan 4. walaupun  $1 = 1 \times 1$ , yang berarti 1 mempunyai faktor 1 dan dirinya sendiri, akan tetapi 1 tidak digolongkan sebagai bilangan prima. Bilangan prima adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1 yang mempunyai hanya dua faktor yaitu 1 dan dirinya sendiri. Jadi, bilangan prima positif adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23 dan seterusnya. Bagaimana cara kita menentukan semua bilangan prima antara 1 sampai 1007. Coba perhatikan tabel dibawah ini.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
98	99	100									

1. Coretlah semua kelipatan 2 yang lebih besar dari 2
2. Coretlah semua kelipatan 3 yang lebih besar dari 3
3. Coretlah semua kelipatan 5 yang lebih besar dari 5
4. Coretlah semua kelipatan 7 yang lebih besar dari 7

Setelah empat jenis pencoretan itu, semua yang tidak tercoret menyatakan bilangan prima antara 1 dan 100

Jika, harus mencari semua bilangan prima antara 1 dan  $a$ , langkahnya adalah sebagai berikut:

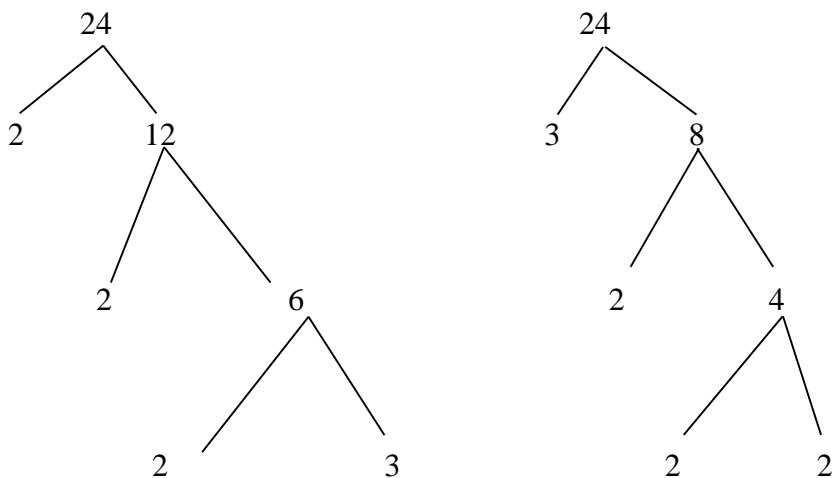
1. Carilah bilangan bulat  $m$  sedemikian sehingga  $m \times m \leq n$  dan  $(m + 1) > n$
2. kerjakan percobaan seperti diatas sampai dengan kelipatan  $m$ .

### 3. Bilangan Komposit

Bilangan cacah yang lebih besar dari 1 dan bukan bilangan prima disebut bilangan komposit. Misalkan  $24 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$ . jadi, 24 adalah bilangan komposit.

Setiap bilangan komposit dapat dinyatakan sebagai hasil kali biangan-bilangan prima. Penulisan bilangan komposit sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima ini. Disebut sebagai pemfaktoran prima. Untuk menyatakan bilangan komposit sebagai hasil kali faktor-faktor prima, salah satu cara yang dapat digunakan adalah pembuatan pohon faktor.

Sebagai contoh perhatikan proses pembuatan pohon faktor dari 24 berikut:





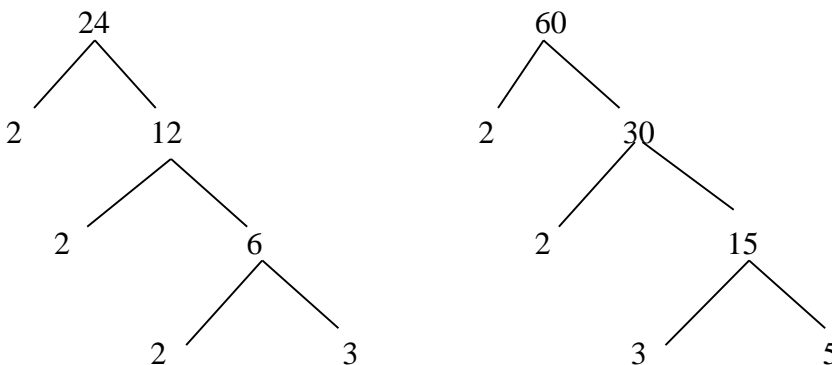
Pada bilangan sebelah kiri, 24 kita nyatakan sebagai hasil kali dari 2 dan 12. Karena bilangan prima, sedangkan 12 bukan prima, maka 12 kita faktorkan lagi, menjadi 6 dan kita tulis satu baris dibawah 12 ini. Selanjutnya karena 6 bukan bilangan prima, kita nyatakan 6 ini sebagai hasil kali dari 2 dan 3 dan kita tuliskan faktor –faktor ini satu baris di bawah 6. Sampai disini, maka pohon faktor sudah dapat diakhiri karena semua faktornya sudah prima.

Pada bagian sebelah kanan, kita mulai menyatakan 24 sebagai hasil kali dari 3 dan 8. Karena 3 sudah bilangan prima, dan 8 bukan bilangan prima, maka 8 kita faktorkan lagi sehingga satu baris dibawah 8 kita tuliskan faktornya yaitu 2 dan 4. Selanjutnya karena 4 bukan bilangan prima, maka kita faktorkan lagi 4 sehingga satu baris di bawah 4 kita tuliskan 2 dan 2 sebab  $2 \times 2$  sama dengan 4. Sampai disini maka semua faktornya sudah merupakan bilangan prima. Oleh karenanya, pohon faktor sudah berakhir.

Kalau diperhatikan kedua bagian diatas, maka 2 dan 3 adalah faktor –faktor prima dari 24, sedangkan 4, 6, 8, dan 12 adalah faktor komposit dari 24.

#### 4. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Perhatikan pohon faktor dari 24 dan 60 dibawah ini.



24 mempunyai faktor 1, 2,3, 4, 6, 8, 12, dan 24

60 mempunyai faktor 1,2,3,4,5,6,10, 12,15, 20, 30 dan 60

24 dan 60 mempunyai faktor persekutuan 2, 3, 4, 6 dan 12. yang terbesar diantara semua faktor persekutuan itu adalah 12. oleh karena itu, 12 disebut faktor persekutuan terbesar (FPB) dari 24 dan 60.

Cara menyusun pohon faktor yang baik adalah sebagai berikut:

1. Faktor prima terkecil.
2. Cari hasil bagi bilangan itu oleh faktor prima tersebut.
3. Kembali ke-1 untuk hasil bagi pada langkah 2
4. Berhenti setelah diperoleh hasil bagi prima.

Contoh:

Buat pohon faktor untuk 72

1. Faktor prima terkecil adalah 2
2.  $72 : 2 = 36$
1. Faktor prima terkecil dari 36 adalah 2
2.  $36 : 2 = 18$
1. faktor prima terkecil dari 18 adalah 2
2.  $18 : 2 = 9$
1. Faktor prima terkecil adalah 3
2.  $9 : 3 = 3$

4 berhenti sebab hasil bagi  $9 : 3$  yaitu 3 adalah bilangan prima.

Jadi, faktor prima ditulis di sebelah kiri, faktor bukan prima di sebelah kanan. Faktor bukan prima yang lain dapat diperoleh dengan mengalikan faktor-faktor prima, yaitu  $2 \times 2 = 4$ ,  $2 \times 3 = 6$ ,  $2 \times 2 \times 2 = 8$ ,  $2 \times 2 \times 3 = 12$ ,  $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$ . Jadi, faktor bukan prima dari 72 adalah 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24 dan 36

## 5. Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)

Perhatikan sebaris bilangan dibawah ini:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18

Bilangan 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 disebut kelipatan 2, sedangkan 3, 6, 9, 12, 15, 18 adalah kelipatan 3.

6, 12, dan 18 disebut kelipatan persekutuan dan 2 dan 3. Coba sekarang cari kelipatan persekutuan yang lain. Ternyata banyak sekali, dan yang paling kecil dari antara kelipatan –kelipatan persekutuan tersebut adalah 6. Oleh karena itu, 6 disebut kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari 2 dan 3.

## 6. Pengajaran FPB, KPK, Bilangan Prima, dan Komposit

Seperti bahan matematika yang lain yang diberikan di sekolah dasar, bilangan prima, bilangan komposit, FPB, dan KPK, perlu disajikan dengan cara yang sesuai dengan perkembangan intelektual dan emosional siswa sekolah dasar. Jadi perlu disusun cara mengajar bahan tersebut diatas. Berikut adalah cara bagaimana guru menyampaikan bahan tersebut kepada siswa SD, agar mereka dapat memahami dan menggunakannya.

### a) Pengajaran bilangan genap dan ganjil

Mengajarkan bilangan genap dan ganjil dapat dimulai dengan memberi siswa beberapa contoh, kemudian melihat sifat dari bilangan genap atau ganjil dari contoh, baru kemudian memberitahukan apa yang disebut bilangan genap atau ganjil itu. Berikut adalah salah satu cara yang bisa digunakan.

Guru : anak-anak coba perhatikan bilangan yang bapak/ibu tulis di papan tulis

(guru menulis 2, 4, 6, dan 8)

Bilangan -bilangan ini disebut bilangan genap

Disebut bilangan apa?

Tia

Tia : bilangan genap

Guru : baik sekali

Guru : coba perhatikan sekali lagi keempat bilangan ini, dan kemudian jawab pertanyaan bapak/ibu berikut.

Apakah 4 dapat dibagi 2?

Coba Wildi

Wildi : 4 dapat dibagi 3 pak/ ibu

Guru : benar, Wildi

Berapa hasilnya, Toar

Toar : Dua Pak/ibu

Guru : bagaimana dengan 6 dan 8, apakah mereka dapat dibagi dengan 2?

Dan berapa hasilnya?

Coba Lodi

Lodi : dapat Pak/Bu

Guru : tepat Lodi, berapa hasilnya?

Toar

Toar : 3 dan 4 Pak/ Bu

Guru : benar sekali Toar

Coba sekarang dengan pertanyaan bapak/Ibu ini

Jadi, kalau begitu bilangan genap itu bilangan yang bagaimana?

Guru menyuruh anak menjawab pertanyaan ini. Jika seorang anak tidak bisa menjawab, maka dipindahkan giliran kepada anak yang lain sampai diperoleh jawaban yang benar. Jika jawaban yang benar sudah dikemukakan oleh siswa, guru kemudian meminta siswa untuk memberi contoh bilangan genap yang lain.

Guru : coba sekarnag masing-masing mencari satu contoh bilangan genap yang lain

Guru menunjuk beberpa siswa untu menulis jawaban mereka di papan, kemudiana melihat kebenaran jawaban siswa tersebut dengan bantuan siswa yang lain.

Kemudian guru menampilkan karton bertuliskan bilangan mulai dari 0 sampai 100, dan membagikan kertas dengan tulisan serupa kepada setiap siswa. Siswa diminta untuk melingkari lambang bilangan genap pada kertas masing-masing. Guru berkeliling untk melihat pekerjaan individual siswa dan memberi bantuan jika diperlukan. Setelah itu guru menyuruh anak untuk melingkari bilangan genap yang ada di karton. Setelah guru yakin bahwa siswa sudah memahami, maka tibalah saatnya memperkenalkan bahwa bilangan 0 adalah juga bilangan genap.

Kemudian guru dapat menyuruh anak secara bergiliran menyebutkan bilangan genap mulai dengan 0 sampai 100. Setelah itu guru dapat mulai mengajarkan konsep- dan sifat bilangan gasal. Guru dapat menampilkan kembali kertas karton bertuliskan bilangan 0 sampai dengan 100 yang dipakai untuk menerangkan konsep dan sifat bilangan genap dan meminta siswa secara bergiliran memberi tanda silang pada lambang bilangan gasal. Kemudian guru meminta anak untuk melakukan hal yang serupa pada kertas mereka masing-masing. Kemudian guru menunjukan setiap kali satu bilangan dan meminta anak menyebutkan apakah bilangan itu genap atau gasal.

### **b) Pengajaran Bilangan Prima dan komposit**

Pengajaran bilangan prima dapat dimulai dengan memberikan 3 contoh bilangan prima, yaitu 2, 3, dan 5. Kemudian guru dengan bantuan siswa memfaktorkan ketiga bilangan tersebut, dan menuliskan di papan tulis. Guru mengemukakan bahwa ketiga bilangan tersebut adalah bilangan prima. Kemudian guru menunjukan kepada siswa bahwa ketiga bilangan itu mempunyai sifat yang sama yaitu bahwa faktornya adalah 1 dan dirinya sendiri. Kemudian mengajak siswa mendefinisikan bilangan prima. Beberapa siswa diminta untuk menuliskan definisi mereka masing-masing di papan. Dengan melalui Tanya jawab guru berusaha agar akhirnya kelas memperoleh definisi yang bertentangan bilangan prima yaitu: "bilangan prima adalah bilangan cacah yang besar dari 1 dan mempunyai tepat 2 faktor saja yaitu 1 dan dirinya sendiri". Kemudian guru meminta untuk mencari bilangan prima yang lain antara 1 dan 100 dengan menggunakan karton bertuliskan bilangan mulai 0 sampai 100.

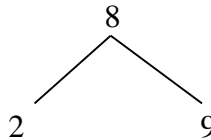
### **c) Pengajaran Pemfaktoran**

Mengajarkan pemfaktoran dapat dimulai dari suatu kalimat perkalian sederhana. Misalnya:  $2 \times 3 = 6$

2 dan 3 disebut faktor dari 6. Kemudian guru dapat melanjutkan dengan menyatakan kalimat berikut. Dari pengertian faktor di atas dapat disimpulkan bahwa setiap faktor dari suatu bilangan bulat membagi habis bilangan tersebut. Jadi kalau kalian ingin mencari faktor suatu bilangan,

maka kalian cukup mencari bilangan yang membagi habis bilangan tersebut. Kemudian guru memberi contoh berikut:

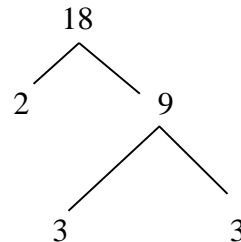
Pertama tulis dengan bilangan prima yang kurang dari 4, yaitu 2 dan 3. Kemudian tanyakan kepada siswa apakah 2 membagi habis 18 dan jika ya, hasil baginya. Kemudian anda tulis di papan:



Kemudian apakah 9 habis dibagi 2? Karena jawabnya tidak, ambil bilangan prima berikutnya yaitu 3. Kemudian ulangi pertanyaan yang anda ajukan pada bilangan 2 tadi. Setelah anda memperoleh jawaban yang benar dari siswa, anda tulis di papan di bawah tulisan tadi, sehingga memperoleh:

$$2 \times 9 = 18$$

$$3 \times 3 = 9$$



Karena anda telah memperoleh semua faktor prima, maka proses dihentikan, dan minta siswa untuk memperhatikan pohon faktor (yaitu yang anda tulis di sebelah kanan).

Ada tiga faktor yang tertulis di situ, yaitu 2, 3, dan 9. kemudian anda perlu menunjukkan bahwa  $6 = 2 \times 3$  juga faktor karena 2 dan 3 faktor dari 18. jadi semua faktor dari 18 adalah 1, 2, 3,  $2 \times 3$  (6),  $3 \times 3$  (9) dan 18. beri latihan memfaktorkan dua atau tiga bilangan lagi dan langsung bahas hasilnya di kelas saat itu pula.

#### d) Pengajaran Kelipatan

Mengajarkan kelipatan dapat menggunakan garis bilangan, dengan cara menghitung loncat.

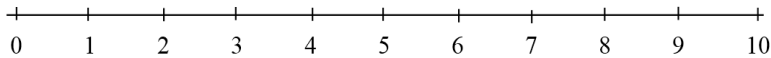
Pertama tulis kalimat:  $2 \times 2 = 4$

$$3 \times 2 = 6$$

$$4 \times 2 = 8$$

Minta kelas untuk memperhatikan ketiga kalimat perkalian diatas. Katakan kepada kelas bahwa 4,6 dan 8 adalah kelipatan 2. Tanyakan garis bilangan di papan (garis bilangan dibuat pada karton yang sebelumnya sudah anda siapakan atau digambar langsung di papan sebelum pelajaran dimulai)

Minta siswa menunjuk bilangan yang merupakan kelipatan 2 selain ketiga bilangan tadi pada garis bilangan yang anda tayangkan di papan tulis. Setelah itu tunjukan bahwa kelipatan 2 diperoleh dengan membilang loncat 2 mulai dari 2. Yaitu: 2, 4, 6, 8 dan seterusnya dengan menunjuk bilangan tersebut pada garis bilangan.



Kemudian ajak siswa mencari kelipatan 3 dengan membilang loncat tiga. Kemudian beri latihan yang cukup tentang mencari kelipatan suatu bilangan.

### e) Pengajaran FPB

Untuk mencari faktor persekutuan terbesar dari dua bilangan perlu lebih dahulu mencari faktor persekutuan. Sedangkan untk mencari faktor persekutuan tersebut kita perlu mencari faktor dari masing-masing bilangan itu. Jadi, untuk mencari faktor persekutuan terbesar dari dua bilangan ajaklah siswa anda untuk:

- Mendaftar semua faktor dari masing–masing bilangan.
- Mendaftar semua faktor persekutuannya, dan
- Memilih bilangan terbesar dari daftar pada b

Sebagai contoh misalnya anda telah mengajarkan cara memperoleh faktor persekutuan terbesar dari 36 dan 45. Maka pertama suruhlah siswa anda untuk mendaftarkan semua faktor dari 36 dan 45 yaitu:

Faktor dari 36 : 1, 2, 3,4, 6, 9, 12, 18, 36 dan

Faktor dari 45 : 1, 3, 5, 9, 15, 45

Minta siswa anda untuk mencari faktor persekutuan. Faktor persekutuan dari 36 dan 45 adalah 1, 3, dan 9.

Jadi, faktor persekutuan terbesar dari 36 dan 45 adalah 9

Beri latihan di kelas dan bahas hasilnya saat itu juga dan kemudian beri latihan untuk pekerjaan rumah.

#### **f) Pengajaran KPK**

Seperti pada pengajaran mencari persekutuan, maka pengajaran mencari kelipatan persekutuan terkecil dapat juga menggunakan garis bilangan. Misalkan pada hendaknya menunjukkan cara mencari kelipatan persekutuan terkecil dari 4 dan 15.

Pertama, susun daftar kelipatan dari yang terbesar di antara kedua bilangan itu, yaitu kelipatan 15.

Kelipatan dari 15 : 15, 30, 45, 60, 75, 90.

Kemudian daftar kelipatan dari bilangan yang lebih kecil, yaitu kelipatan dari 4. Kelipatan dari 4 : 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 80, 84.

Jadi, kelipatan persekutuan terkecil dari 4 dan 15 adalah 60.

Perhatikan bahwa hasil kali dua bilangan tersebut adalah sama dengan kelipatan persekutuan terkecilnya. Akan tetapi belum tentu hasil kali itu adalah kelipatan persekutuan terkecilnya. Agar memperoleh kejelasan tentang hal ini perhatikan 2 pasang bilangan 24, 4, dan 24, 5. Kelipatan persekutuan terkecil dari 24 dan 4 adalah 24 yang tidak sama dengan  $24 \times 4$ . Kelipatan persekutuan terkecil dari 24 dan 5 adalah 120. Mengapa demikian? Hal ini disebabkan oleh fakta bahwa 4 merupakan faktor dari 24 jadi 24 juga kelipatan dari 4. Dengan demikian kelipatan persekutuan terkecil dari 24 dan 4 adalah  $1 \times 24$ , bukan  $4 \times 24 = 96$ . Sedangkan 5 adalah bukan faktor dari 24, sehingga 24 bukan kelipatan dari 5 dan karena 5 adalah prima maka kelipatan persekutuan dari 24 dan 4 adalah  $24 \times 5 = 120$ .



## DAFTAR PUSTAKA

- D'Augustine, C. And Smith, W. C (jr). 1992. *Teaching Elementary School Mathematics*. New York, NY: Harper Collins
- Kennedy, L. M. And Tipps, S. 1994. *Guiding Children's Learning of Mathematics*. Belmont, CA: Wadsworth
- Sutawidjaja, A. Muhsetyo, G., Muchtar, A.K, dan Soewito. 1991/1992. *Pendidikan Matematika 3*. Jakarta: Depdikbud (Proyek Pengembangan PGSD).
- Sutawidjaja, A. Muhsetyo, G., Muchtar, A.K,. 1991/1992. *Pendidikan Matematika2*. Jakarta: Depdikbud (Proyek Pengembangan PGSD).

## BAB VII

# BANGUN-BANGUN RUANG

Pengetahuan geometri dapat mengembangkan pemahaman anak terhadap dunia sekitarnya. Tidak hanya kemampuan tentang bangun datar, kemampuan tentang bangun ruangpun dapat dikenalkan kepada anak usia sekolah dasar, bahkan pada anak usia Taman Kanak-Kanak asalkan melalui pendekatan yang cocok dengan perkembangan tahap berpikir mereka.

Sebagaimana bangun datar, kemampuan bangun ruang akan membantu anak memahami, menggambarkan, atau mendeskripsikan benda-benda di sekitar anak. Disamping itu kesalahpahaman anak akan gambar dan diagram yang biasanya digunakan untuk melukiskan konsep-konsep matematika yang penting dalam buku ajar matematika serta biasanya merupakan hasil dari kemampuan mengenai ruang yang lemah.

Anak akan lebih tertarik untuk mempelajari geometri jika mereka terlibat secara aktif dalam kegiatan-kegiatan individu atau kelompok berkenaan dengan geometri. Anak hendaknya diberi kesempatan untuk melakukan investigasi secara individu atau kelompok dengan bantuan benda-benda konkret di sekitar anak.

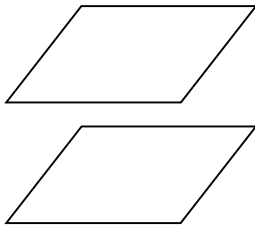
Banyak topik dan kemampuan di sekolah dasar tergantung pemahaman mengenai ruang yang dimiliki oleh anak, misalnya tentang pengukuran, taksiran, garis bilangan, pecahan, dan sebagainya. Disamping itu pemanipulasian objek-objek dalam ruang juga memberikan latar belakang untuk memahami aljabar, trigonometri, kalkulus dan banyak topik matematika tingkat tinggi lainnya. Akhirnya, perlu dikemukakan

sekali lagi bahwa pengalaman-pengalaman yang didapat dapat mempelajari geometri dapat mengembangkan kemampuan pemecahan masalah dan pemberian alasan yang dapat mendukung topik lainnya dalam matematika.

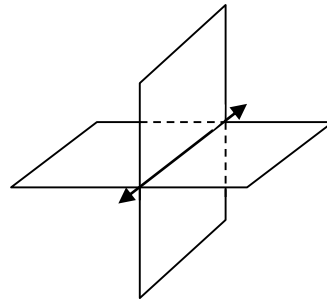
## A. BIDANG BANYAK

Sebelum membahas bidang banyak, kita akan membahas lebih dahulu mengenai bidang, garis-garis bersilangan, dan sudut antara dua bidang.

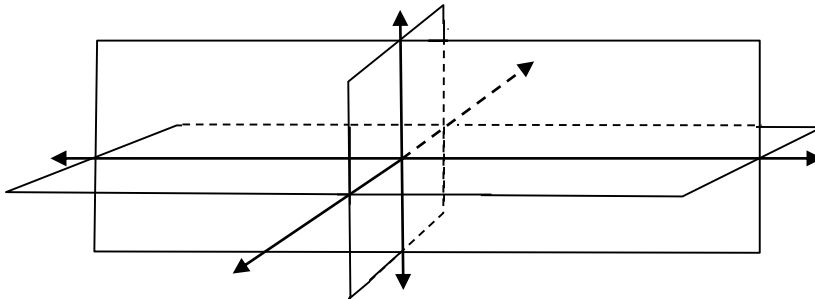
Telah anda ketahui bahwa bangun tiga dimensi mempunyai panjang, lebar, dan tinggi. Gambar 2.1, 2.2, dan 2.3 mengilustrasikan relasi yang mungkin antara bidang-bidang dalam ruang tiga dimensi.



Dua Bidang yang Saling Sejajar  
Gambar 2.1

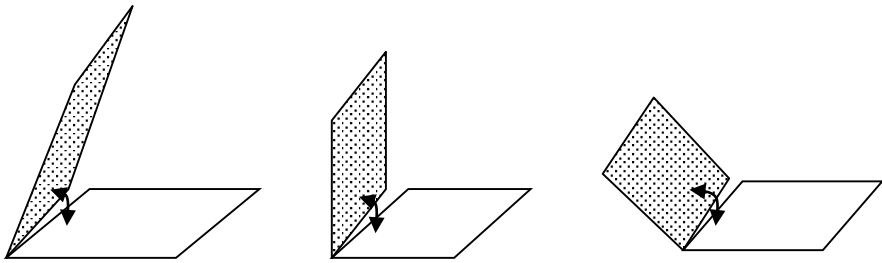


Dua Bidang yang Saling Berpotongan  
Gambar 2.2



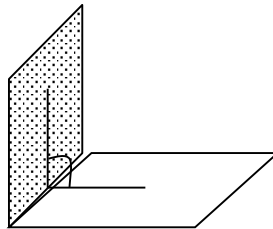
Tiga Bidang yang Saling Berpotongan  
Gambar 2.3

Anda dapat mendefinisikan sudut yang dibentuk oleh bidang banyak. Sudut dua bidang (dihedron, di = dua, hedron = bidang) adalah sudut dibentuk oleh daerah-daerah segibanyak (poligon) dalam ruang yang salah satu sisinya saling berpotongan. Gambar 2.4 mengilustrasikan sudut dua bidang yang dibentuk oleh perpotongan daerah-daerah persegi panjang.



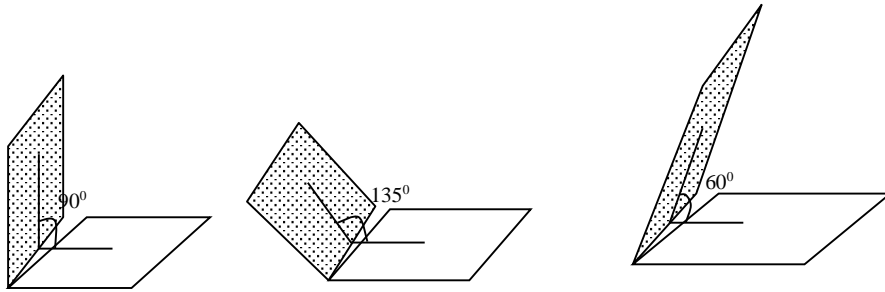
Gambar 2.4

Anda dapat mengukur sudut dua bidang dengan mengukur suatu sudut antara dua segmen garis atau sinar garis - sinar garis pada bidang-bidang tersebut seperti yang diilustrasikan pada gambar 2.5. Ingatlah bahwa segmen garis yang dibentuk dari sisi-sisi sudut adalah tegak lurus dengan segmen garis yang merupakan perpotongan kedua sisi dari sudut dua bidang tersebut.



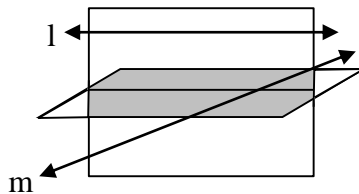
Gambar 2.5

Gambar 2.6 berikut menunjukkan ukuran beberapa sudut antara dua bidang.



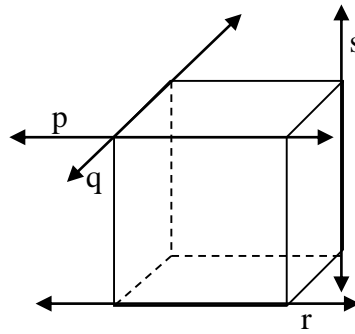
Gambar 2.6

Dari pembahasan di atas, anda dapat melihat bahwa peranan bidang pada dimensi tiga seperti garis pada dimensi dua. Selanjutnya garis pada ruang dimensi tiga yang tidak berpotongan dan tidak sejajar disebut garis yang bersilangan. Garis  $l$  dan  $m$  pada gambar 2.7 berikut adalah garis-garis yang bersilangan.



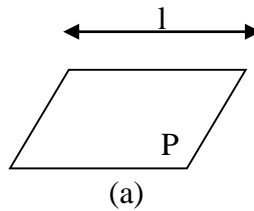
Gambar 2.7

Dengan demikian, ada tiga relasi dua garis pada ruang dimensi tiga: sejajar, berpotongan, atau bersilangan. Gambar 2.8 menunjukkan relasi antara rusuk-rusuk suatu kubus. Perhatikan bahwa garis  $p$  dan  $r$  sejajar, garis  $p$  dan  $q$  berpotongan, dan garis  $q$  dan  $s$  bersilangan. Silahkan anda menyebut pasangan-pasangan garis lain yang saling sejajar, berpotongan dan bersilangan



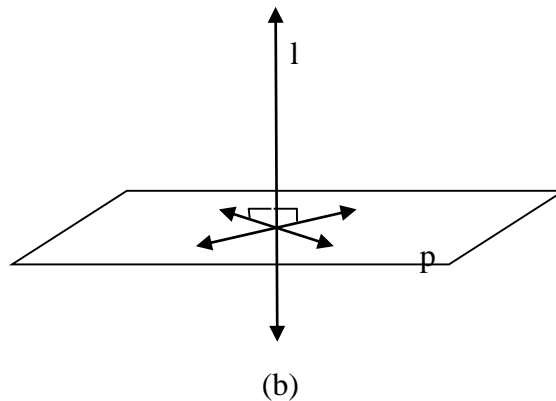
Gambar 2.8

Pada ruang dimensi tiga garis  $l$  sejajar dengan bidang  $p$ . Jika  $p$  dan  $l$  tidak berpotongan. Perhatikan gambar 2.9 berikut



Gambar 2.9

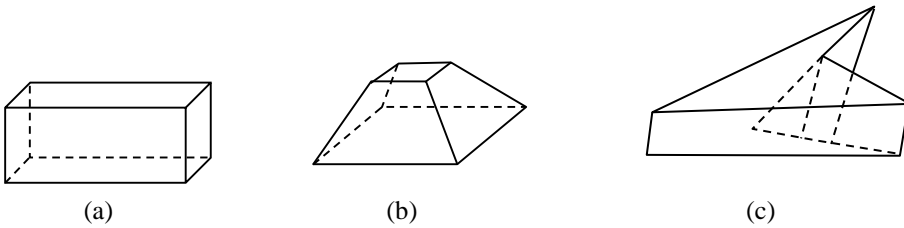
Suatu garis  $l$  tegak lurus bidang  $p$  jika  $l$  tegak lurus pada setiap garis yang melalui titik potong antara garis  $l$  dan bidang  $p$  Gambar 2.10



Gambar 2.10

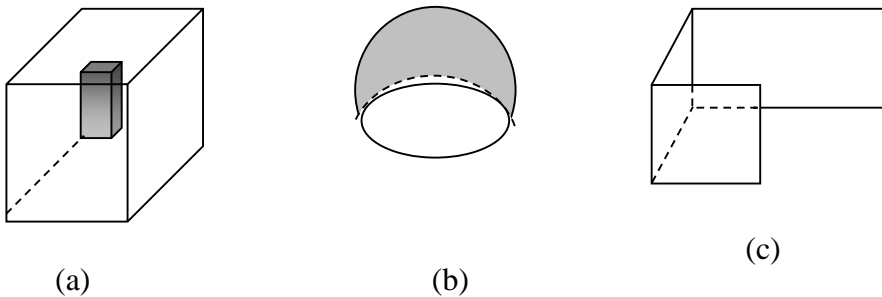
Setelah anda memahami relasi bidang-bidang pada ruang dimensi tiga, sudut antara dua bidang, serta relasi garis-garis pada ruang dimensi tiga, berikut akan dibahas bidang banyak.

Kubus merupakan contoh bidang banyak pada ruang dimensi tiga. Bidang banyak pada ruang dimensi tiga disebut polihedron atau analog dengan poligon pada ruang dimensi dua. Suatu polihedron merupakan gabungan dari daerah-daerah poligon, sekarang dua daerah poligon mempunyai bidang banyak satu sisi persekutuan sedemikian hingga daerah dalam ruang tersebut tertutup tanpa cela/lubang. Gambar 2.11 menunjukkan contoh beberapa polihedron



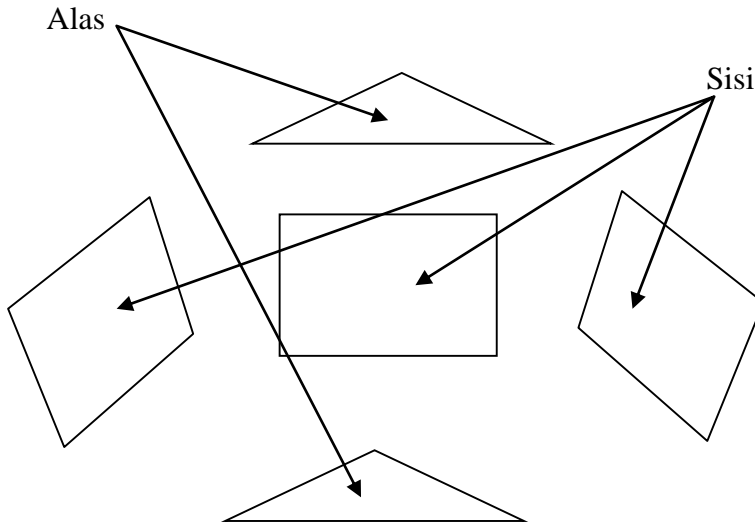
Gambar 2.11

Selanjutnya, berikut ini adalah beberapa contoh yang bukan polihedron (a) bukan polihedron karena mempunyai lubang, (b) bukan polihedron karena bidang lengkung dan gambar (c) bukan polihedron karena daerah yang dalam ruang tidak tertutup.



Gambar 2.12

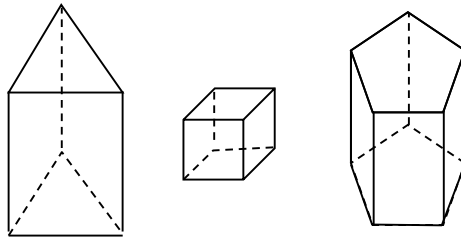
Dua polihedron pada gambar 2.11 yaitu (a) dan (b) merupakan polihedron konveks sedangkan polihedron yang ketiga pada gambar bukan konveks. Selanjutnya daerah poligon dari polihedron tersebut sisi, segmen garis persekutuan dua sisi disebut rusuk, titik potong dua rusuk disebut titik sudut.



Gambar 2.14

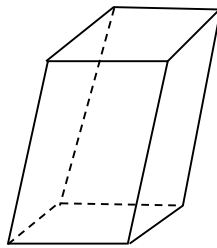
Polihedron diklasifikasikan menjadi beberapa macam. Misalnya Prisma merupakan polihedron dengan dua sisi yang saling berhadapan merupakan poligon yang identik. Sisi-sisi tersebut biasa disebut sisi alas atau alas. Jadi terdapat dua alas atas dan alas bawah. Titik-titik sudut pada bidang-bidang alasnya (alas atas dan alas bawah) merupakan sisi yang membentuk jajaran genjang. Jika sisi tersebut persegi panjang, maka disebut prisma tegak, dan sudut dihedron yang dibentuk sisi tersebut dengan sisi alasnya pastilah tegak lurus, sebaliknya disebut prisma miring. Berikut ini adalah ilustrasi bagian-bagian prisma (gambar 2.14), beberapa contoh prisma tegak (gambar 2.15), contoh prisma miring (2.16). Karena ada banyak tak hingga poligon yang digunakan sebagai alas, maka terdapat banyak tak hingga prisma.





Beberapa Prisma tegak

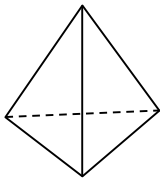
Gambar 2.15



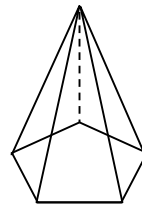
Prisma miring

Gambar 2.16

Limas merupakan polihedron yang dibentuk dari poligon sebagai alas dan titik yang tidak terletak pada sisi alas, yang disebut titik puncak, antara setiap titik sudut pada alas dan titik puncak dihubungkan oleh segmen garis-segmen garis. Gambar di bawah ini merupakan contoh beberapa limas, namanya tergantung dari jenis poligon yang membentuk alas.

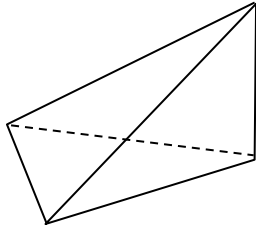


Limas tegak segitiga

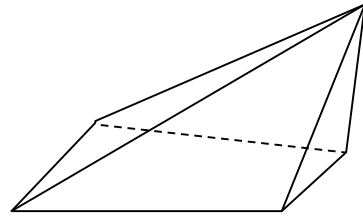


Limas tegak segilima

Gambar 2.17



Limas Miring Segitiga

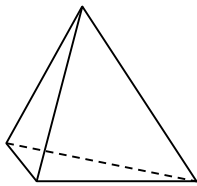
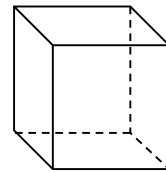
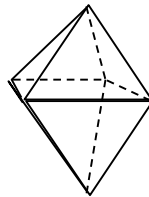


Limas Miring Segiempat

Gambar 2.18

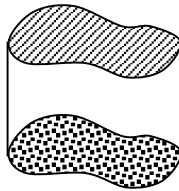
Ada dua kategori limas, yaitu limas tegak dan limas miring. Gambar 2.17 adalah contoh limas tegak, sedang gambar 2.18 adalah contoh limas miring.

Polihedron yang sisi-sisinya beraturan telah banyak dipelajari sejak zaman Yunani kuno. Suatu polihedron beraturan adalah polihedron yang semua sisinya merupakan daerah poligon yang beraturan identik (sama dan sebangun) dan semua sudut dihedronnya mempunyai ukuran yang sama. Pada zaman Yunani kuno telah dapat ditunjukkan ada lima polihedron konveks beraturan seperti 2.19

Limas Tegak Segitiga  
(Tetrahedron)Kubus  
(Heksahedron)Limas Berpasangan  
(Oktahedron)

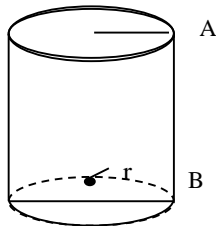
## B. BANGUN TIGA DIMENSI YANG BERPERMUKAAN LENGKUNG

Analog dengan prisma dan limas, terdapat bangun tiga dimensi yang berpermukaan lengkung, yaitu tabung dan kerucut. Gambar tabung terlihat pada gambar 2.20. Alas tabung tersebut tidak berupa daerah lingkaran. Untuk pembahasan selanjutnya, dibatasi hanya pada tabung yang alasnya berupa daerah lingkaran.

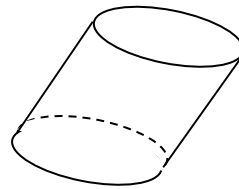


Gambar 2.20

Selanjutnya tabung dibedakan menjadi dua, yaitu tabung lingkaran tegak, seperti gambar 2.21 (a) dan tabung lingkaran miring, seperti gambar 2.21 (b)



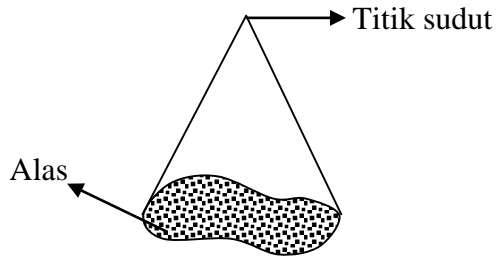
Tabung lingkaran tegak  
(a)



Tabung lingkaran miring  
(b)

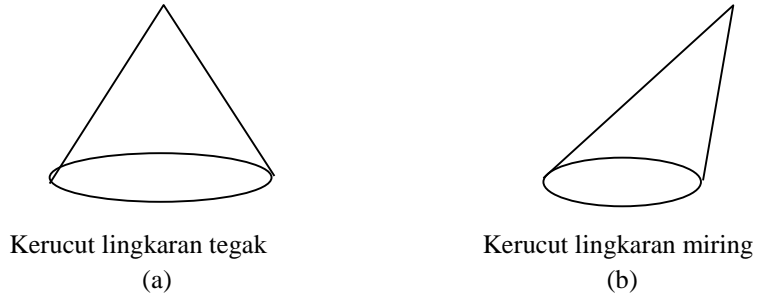
Gambar 2.21

Berikut ini merupakan gambar kerucut. Alas kerucut tersebut bukan berupa daerah lingkaran (gambar 2.22). Untuk pembahasan selanjutnya, dibatasi hanya pada kerucut yang alsnya berupa daerah lingkaran.

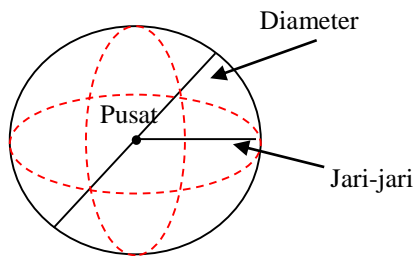


Gambar 2.22

Selanjutnya kerucut dibedakan menjadi dua, yaitu kerucut lingkaran tegak seperti gambar 2.23 (a) dan kerucut lingkaran miring seperti gambar 2.23 (b).



Gambar 2.23



Gambar 2.24

## **C. PENGAJARAN BIDANG BANYAK KELAS-KELAS RENDAH SD**

Anak mempunyai banyak pengalaman di dalam dan di luar rumah dengan objek-objek yang memiliki tiga dimensi, kotak kue (balok/kubus), batu bata (balok), benda-benda souvenir yang berbentuk limas atau prisma. Dengan mengkaji benda-benda yang ada di sekitar, anak dapat mengidentifikasi benda-benda ruang.

Berdasarkan Garis-Garis Besar Program Pengajaran (GBPP) Matematika Sekolah Dasar tahun 1994 mulai kelas II SD cawu 3, siswa mulai dikenalkan dengan bangun-bangun ruang, yaitu tentang kubus dan balok. Pada waktu mengenalkan kubus dan balok diperlukan benda-benda di sekitar anak yang berbentuk kubus dan balok. Misalnya anak dikenalkan bahwa kotak kapur berbentuk kubus, batu bata berbentuk balok. Setelah itu anak diminta mengidentifikasi bangun-bangun ruang di sekitar anak manakah yang berbentuk kubus, manakah yang berbentuk balok, manakah yang bukan kubus, dan manakah yang bukan balok..

Sewaktu kelas III SD cawu 3, anak dikenalkan bangun ruang berbentuk prisma, limas dan kerucut. Mereka dikenalkan bangun ruang dari benda-benda sekitar anak. Misalnya tenda pramuka berbentuk limas tegak, terompet kertas berbentuk kerucut, atap rumah ada yang berbentuk limas dan ada yang berbentuk prisma tegak.

## **D. PENGAJARAN BANGUN TIGA DIMENSI YANG BERPERMUKAAN LENGKUNG**

### **1. Pengenalan bangun tiga dimensi yang berpermukaan lengkung**

Sebagaimana dikemukakan di depan, anak mempunyai banyak pengalaman di dalam dan di luar rumah dengan objek-objek yang memiliki tiga dimensi yang berpermukaan lengkung, seperti kaleng susu (tabung), tempat es cream (kerucut), bola yang biasa mereka lihat ataupun yang mereka mainkan sendiri dalam permainan bola volly, basket atau sepak bola, yang memang berbentuk bola. Dengan mengkaji benda-benda

yang ada di sekitar, anak akan dapat mengidentifikasi benda-benda ruang di sekitar mereka.

Pada waktu mengenalkan bangun tiga dimensi yang berpermukaan lengkung, sediakan benda-benda konkret yang ada di sekitar mereka, kemukakan pada siswa mana bangun yang berbentuk tabung, kerucut, dan mana yang berbentuk bola. Kemudian mintalah pada anak untuk menyebutkan bentuk bangun dari benda yang anda tunjuk atau ditunjukkan temannya. Untuk selanjutnya anak dapat mengidentifikasi apakah suatu benda berbentuk tabung, bukan tabung, kerucut, bukan kerucut, bola atau bukan bola.

## **2. Penamaan Bangun Tiga Dimensi yang Berpermukaan Lengkung**

Anak mulai belajar mengenal bangun tiga dimensi yang berpermukaan lengkung pada saat mereka duduk di sekolah dasar kelas IV cawu 3 ini. anak belajar memahami manakah bangun-bangun ruang yang berbentuk kerucut, tabung, dan bola. Kegiatan untuk mengenalkan bangun tiga dimensi yang berpermukaan lengkung seperti di atas, yaitu dengan melalui kegiatan-kegiatan mengidentifikasi benda-benda di sekitar anak apakah berbentuk tabung, bukan tabung, kerucut, bukan kerucut, bola atau bukan bola dapat digunakan untuk menanamkan bangun tiga dimensi yang berpermukaan lengkung. Yang perlu diingat adalah bahwa berilah anak kesempatan untuk memegang dan mengamati secara langsung benda-benda tersebut.

## **E. PEMBELAJARAN BIDANG-BIDANG BANYAK DI KELAS 4 – 6**

### **1. Penanaman konsep tentang bidang-bidang banyak**

Sewaktu kelas IV SD anak memahami kembali tentang bangun ruang yang telah dipelajarinya sewaktu di kelas II cawu 2 dan kelas III cawu 3. Pada kelas ini anak sudah bisa mengidentifikasi bangun yang berbentuk kubus berongga (misalnya kotak kapur), kubus padat (misalnya dadu) dan model kerangka kubus. Demikian juga anak sudah dapat mengidentifikasi bangun yang berbentuk balok berongga (misalnya kotak

korek api), balok padat (misalnya batu bata), dan model kerangka balok. Anak juga bisa mengidentifikasi limas dan prisma.

Anak diminta menyebutkan benda-benda di sekitarnya untuk berbentuk kubus, balok, limas dan prisma. Sewaktu menyebutkannya teman lain menyimak kemudian mendiskusikannya. Berilah anak kesempatan untuk memegang dan mengamati benda-benda ini secara langsung.

Pada saat ini, anak dikenalkan bagian-bagian bidang banyak, yaitu tentang sisi dan rusuknya. Anak diminta menyebutkan banyak sisi dari bangun-bangun kubus, balok, limas segitiga, limas segiempat, dan prisma tegak segitiga. Anak juga diminta untuk menyebut rusuk-rusuk dari bangun-bangun ruang tersebut.

Kebanyakan anak merasa kesulitan untuk memvisualisasikan benda-benda ruang dalam dua dimensi. Kegiatan berikut membantu anak dalam memahami bagaimana bentuk kotak setelah dibuka sisi-sisinya. Untuk selanjutnya anak akan mengenal sisi-sisi kubus dan balok.

### *Kegiatan*

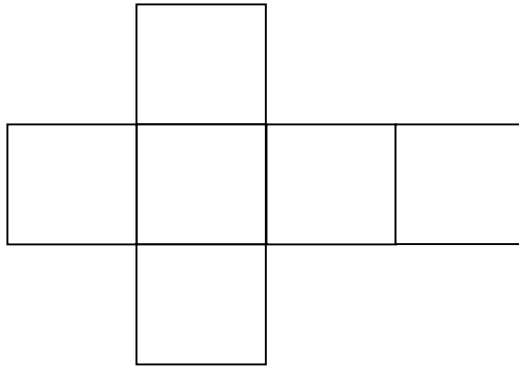
Membuka sisi-sisi kotak yang berbentuk kubus dan balok

### *Materi*

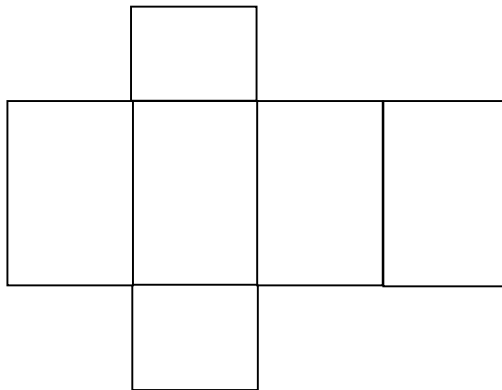
Tempat makanan ringan dari karton yang berbentuk kubus dan balok.  
Gunting

### *Deskripsi*

- Mintalah anak membawa tempat makanan ringan dari karton yang berbentuk kubus atau balok.
- Mintalah mereka menghitung banyaknya permukaan (sisi), sudut, dan garis tepinya
- Mintalah anak untuk memotong sepanjang sisi tepi kotak sedemikian hingga permukaan kotak mendatar seperti gambar 2.25 dan 2.26 berikut.



Gambar 2.25



Gambar 2.26

Selanjutnya mintalah anak untuk maju ke depan untuk menjelaskan kepada teman-temannya, mana sisi dan bentuknya, serta berapa banyaknya sisi dari tiap-tiap bangun tersebut. Mintalah anak-anak yang lain menanggapi. Apakah mereka setuju dengan yang dikemukakan temannya tersebut. Berilah kesempatan mereka untuk berdiskusi.

Sewaktu anak duduk di kelas VI cawu 2, mereka belajar kembali tentang sisi, rusuk dan titik sudut bidang banyak (kubus, balok, prisma, tegak segitiga, limas segitiga, dan limas segiempat). Mintalah mereka mengidentifikasi banyak sisi, banyak rusuk dan banyak titik sudut dari bidang banyak tersebut melalui kegiatan-kegiatan yang menarik. Misalnya pada waktu anak selesai membuat model bidang banyak, anak



dapat secara langsung mengidentifikasi banyak sisi, banyak rusuk dan banyak titik sudut dari bidang banyak tersebut.

## 2. Pembuatan Model Bidang Banyak

Sewaktu di kelas IV cawu 3, anak dikenalkan jaring-jaring kubus dan jaring-jaring balok.

Selanjutnya jaring-jaring kubus merupakan bentuk khusus yang dapat digulung untuk membentuk suatu benda yang berbentuk kubus. Demikian pula jaring-jaring balok. Kegiatan yang melibatkan pembuatan dan penggunaan jaring-jaring adalah sangat baik untuk membantu anak-anak mengembangkan kemampuan visualisasi mereka mengenai ruang. Kegiatan membuka sisi-sisi kotak yang berbentuk kubus dan balok seperti yang telah dibahas di atas dapat digunakan untuk pembelajaran jaring-jaring kubus dan balok. Bentuk pada gambar 2.25 disebut jaring-jaring kubus, sedangkan bentuk pada gambar 2.26 disebut jaring-jaring balok.

Setelah anak memahami jaring-jaring kubus dan balok, anak belajar bagaimana membuat model kubus dan model balok dengan menggunakan kertas karton/kertas tebal.

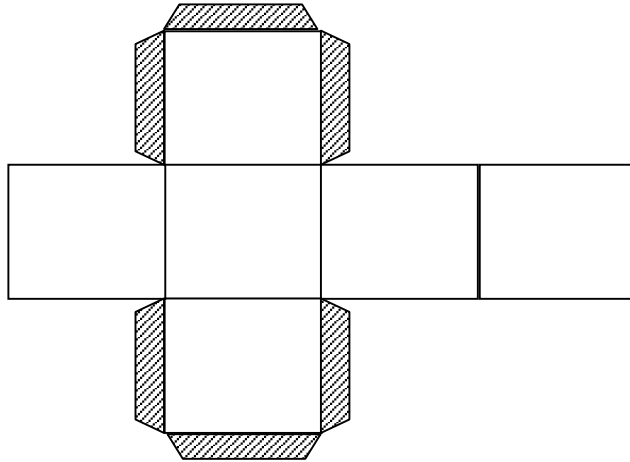
Kegiatan membuat model kubus

### *Materi*

Kertas karton/kertas tebal, gunting, lem perekat

### *Deskripsi*

- Mintalah anak menggambar jaring-jaring kubus yang rusuknya 10 sentimeter, berilah tempat untuk melekatkan. Lihat gambar 2.27
- Mintalah anak untuk menggunting kertas/karton itu menurut keliling gambar itu
- Mintalah anak untuk membuat bangun ruang dari potongan kertas itu. Daerah yang diarsir diberi lem, kemudian dilekatkan pada bagian lain. Maka jadilah sebuah kubus.



Gambar 2.27

Melalui kegiatan yang sama dengan kegiatan di atas, anak dapat membuat model balok.

Selanjutnya sewaktu di SD kelas V cawu 3 anak belajar tentang membuat jaring-jaring limas segitiga dan limas segiempat. Kemudian pada waktu anak kelas VI SD cawu 2, mereka belajar kembali bagaimana membuat jaring-jaring dan model prisma tegak segiempat (balok) dan prisma tegak segitiga. Pembelajaran topik-topik tersebut dapat melalui kegiatan seperti kegiatan membuat jaring-jaring dan model kubus di atas.

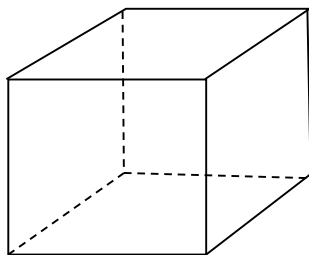
### 3. Penggambaran Bidang Banyak

Sewaktu siswa duduk di kelas IV cawu 3 anak belajar menggambar kubus dan balok. Pada waktu kelas V cawu 3 mereka belajar menggambar limas segitiga dan limas segiempat. Pembelajaran ini diulang sewaktu kelas VI cawu 2, yaitu mereka belajar bagaimana menggambar kubus, balok, prisma tegak dan limas.

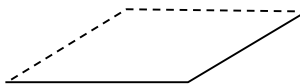
Berikut ini adalah langkah-langkah pembelajaran bagaimana menggambar bidang banyak. Sarankan siswa untuk menggambar pada kertas berpetak atau bertitik.

Anda dapat mengajarkan menggambar kubus melalui tahap-tahap sebagai berikut :

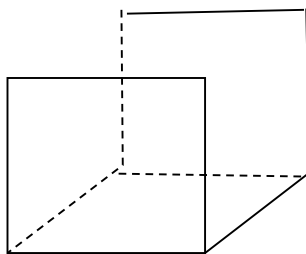
- Mintalah anak untuk memperhatikan gambar kubus. Terlihat pada gambar, bahwa ada dua sisi pada gambar berbentuk persegi, dan sisi-sisi yang lain berbentuk jajaran genjang.



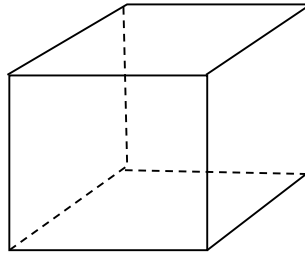
- Mintalah anak menggambar jajaran genjang. Sisi panjang jajaran genjang adalah sama dengan panjang rusuk kubus.



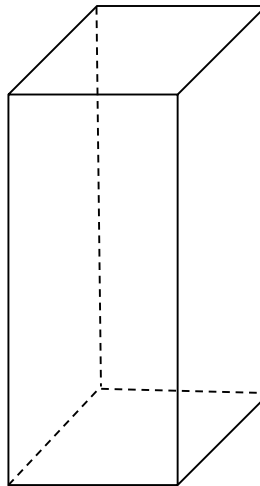
- Mintalah anak menggambar dua persegi, dengan panjang sisi sama dengan panjang rusuk kubus



- Mintalah mereka menghubungkan dua pasang titik sudut dengan rusuk-rusuk yang belum tergambar, maka jadilah gambar kubus. Ingatkan pada siswa rusuk yang sebenarnya tidak kelihatan, digambar dengan garis putus-putus. Dua persegi pada gambar menunjukkan sisi-sisi kubus yang sebenarnya.



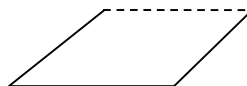
Pembelajaran menggambar balok (prisma tegak segiempat) dapat melalui tahap-tahap seperti berikut. Mintalah anak untuk memperhatikan gambar balok.



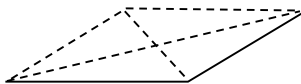
Terlihat pada gambar, bahwa ada dua sisi pada gambar berbentuk segi panjang dan sisi-sisi yang lain berbentuk jajaran genjang. Garis putus-putus menggambarkan rusuk-rusuk yang sebenarnya tidak kelihatan. Selanjutnya mintalah anak untuk menggambar balok lain dengan langkah-langkah seperti menggambar kubus.

Untuk menggambar limas segiempat, anda dapat mengajarkannya melalui tahap-tahap sebagai berikut :

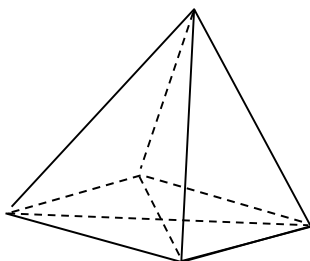
- Mintalah anak menggambar jajaran genjang dengan panjang sisi adalah rusuk sisi alas limas yang sebenarnya



- Mintalah anak menentukan titik perpotongan kedua diagonal. Mintalah anak menggambar sebuah titik di atas titik perpotongan diagonal arah tegak lurus sisi panjang jajaran genjang.



- Mintalah anak menghubungkan titik yang terletak di atas dengan titik sudut jajaran genjang, maka terjadilah limas segiempat



Anak dapat diminta menggambar limas segiempat yang lain dan juga limas segitiga tanpa bantuan guru

## F. PENGAJARAN BANGUN TIGA DIMENSI DI KELAS 4-6

### 1. Penanaman Konsep Bangun Tiga Dimensi yang Berpermukaan Lengkung

Berdasarkan GBPP Matematika SD, sewaktu duduk di kelas IV Sekolah Dasar Cawu 3 anak belajar tentang bangun tiga dimensi berpermukaan lengkung seperti kerucut, tabung dan bola. Pada saat itu anak belajar mengenal bangun tiga dimensi tersebut melalui benda-benda di sekitar mereka. Anda dapat meminta anak menyebutkan benda-benda di sekitar anak yang berbentuk kerucut, tabung dan bola. Berilah anak kesempatan untuk memegang, mengamati dan mengidentifikasi bangun-bangun tersebut. Anda dapat menyediakan model bangun kerucut, tabung dan bola dengan cara menyediakan sendiri atau bersama siswa. Model tersebut dapat dibuat sendiri atau dari benda-benda di sekitar kita, misalnya karton tempat makanan kecil ada yang berbentuk tabung dan

kerucut. Bola dapat menggunakan model bola plastik yang banyak terdapat di sekitar kita. Setelah anak dapat mengidentifikasi bangun kerucut, tabung dan bola, selanjutnya anak belajar tentang bagian-bagian bangun tersebut.

Pada saat anak belajar tentang bagian-bagian tabung dan kerucut, anak diminta menyebutkan banyak sisi luar dan banyak sisi lengkung dari bangun-bangun tabung dan kerucut. Anak juga diminta untuk menyebut rusuk lurus dan rusuk lengkung dari bangun ruang tersebut. Kegiatan berikut dapat digunakan untuk pemahaman bagian-bagian tabung dan kerucut.

### *Kegiatan*

Membuka sisi-sisi wadah yang berbentuk tabung dan kerucut.

### *Materi*

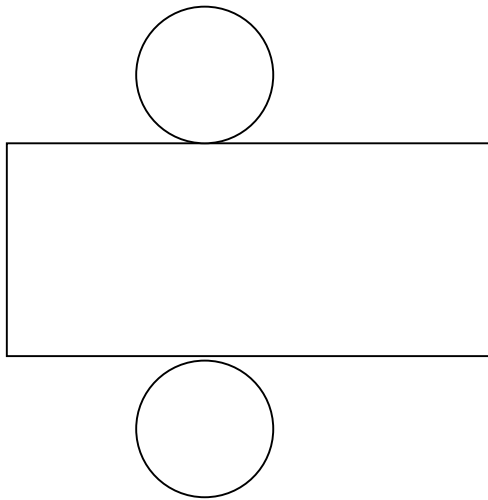
Tempat makanan ringan dari karton yang berbentuk tabung dan kerucut  
Gunting

### *Deskripsi*

- Mintalah anak membawa tempat makanan ringan dari karton yang berbentuk tabung dan kerucut
- Mintalah mereka menghitung banyaknya permukaan (sisi), sudut dan garis tepinya
- Mintalah anak untuk memotong sepanjang sisi tepi wadah sedemikian hingga permukaan wadah tersebut mendatar seperti gambar 2.28 dan 2.29.

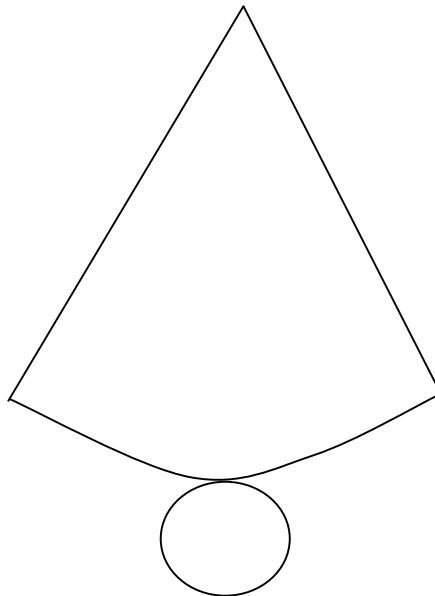
Selanjutnya mintalah anak untuk maju ke depan untuk menjelaskan kepada teman-temannya, mana sisi dan bentuknya serta berapa banyaknya sisi dari tiap-tiap bangun tersebut. Mintalah anak-anak yang lain menanggapi. Apakah mereka setuju dengan yang dikemukakan temannya tersebut. Berilah kesempatan mereka untuk berdiskusi.

Sisi-sisi wadah berbentuk tabung.



Gambar 2.28

Sisi-sisi wadah berbentuk kerucut



Gambar 2.29

## 2. Pembuatan Model Bangun

Sewaktu di kelas V cawu 3 anak belajar membuat jaring-jaring tabung dan jaring-jaring kerucut. Sebagaimana dikemukakan di depan, kegiatan yang melibatkan pembuatan dan penggunaan jaring-jaring adalah sangat baik untuk membantu anak-anak mengembangkan kemampuan visualisasi mereka mengenai ruang termasuk untuk memahami bangun tiga dimensi yang berpermukaan lengkung. Kegiatan membuka sisi-sisi wadah yang berbentuk tabung dan kerucut seperti yang telah dibahas di atas dapat digunakan untuk pembelajaran jaring-jaring tabung dan kerucut. Bentuk pada gambar 2.28 disebut jaring-jaring tabung, sedangkan bentuk pada gambar 2.29 disebut jaring-jaring kerucut.

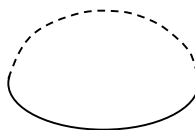
Setelah anak memahami jaring-jaring tabung dan kerucut, anak belajar bagaimana membuat model tabung dan kerucut dengan menggunakan kertas karton/kertas tebal. Melalui tahap-tahap seperti kegiatan pembuatan kubus di atas, anak dapat membuat model tabung dan kerucut.

## 3. Pembuatan Gambar

Sewaktu siswa duduk di kelas V SD Cawu 3 anak belajar menggambar tabung dan kerucut. Pembelajaran ini diulang sewaktu di kelas VI SD cawu 2, yaitu mereka belajar bagaimana menggambar model tabung, kerucut dan juga bola. Berikut ini adalah langkah-langkah pembelajaran bagaimana menggambar bangun tiga dimensi yang berpermukaan lengkung tersebut. Sarankan siswa anda untuk menggambar pada kertas berpetak atau bertitik.

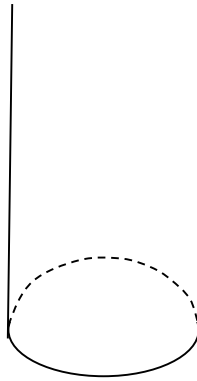
Anda dapat mengajarkan menggambar tabung melalui tahap-tahap sebagai berikut.

- Mintalah anak menggambar satu sisi yang berupa bidang datarnya dalam gambar berbentuk elips, sebenarnya berbentuk lingkaran.

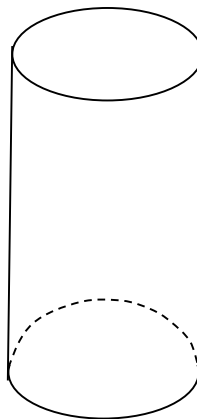




- Mintalah mereka menggambar ruas garis tegak dan sejajar yang masing-masing mulai dari ujung sumbu elips



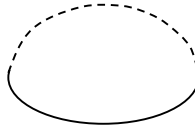
- Mintalah mereka sekali lagi menggambar elips yang sama dengan elips pertama di bagian atas, maka jadilah gambar tabung. Ingatkan bahwa rusuk yang sebenarnya tidak digambar dengan garis putus-putus



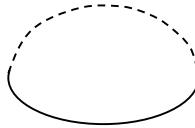
Mintalah mereka menggambar lagi suatu tabung tanpa dituntun guru.

Selanjutnya pembelajaran menggambar kerucut dapat melalui tahap-tahap sebagai berikut.

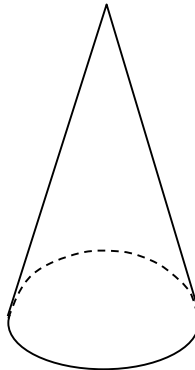
- Mintalah anak menggambar sisi yang berupa bidang datar, pada gambar berbentuk elips, sebenarnya berbentuk lingkaran.



- Mintalah anak menentukan sebuah titik di bagian atas dari pusat elips arah tegak lurus sumbu elips.



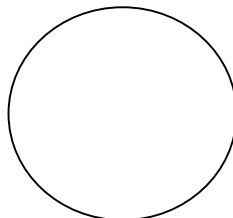
- Selanjutnya titik tersebut merupakan titik puncak kerucut. Mintalah anak menggambar dua garis melalui titik itu yang menyinggung elips tersebut, maka terjadilah gambar kerucut. Ingatkan bahwa rusuk yang sebenarnya tidak kelihatan, digambar dengan garis putus-putus.



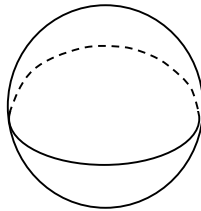
Mintalah mereka menggambar lagi suatu tabung tanpa dituntun guru

Selanjutnya pembelajaran menggambar bola, pembelajarannya dapat dilakukan sebagai berikut.

- Mintalah anak menggambar lingkaran



Untuk membedakan apakah gambar lingkaran itu menunjukkan bangun lingkaran atau bola, maka untuk bangun bola lebih baik diberi tanda sebuah elips atau dua buah elips datar dan tegak. Ingatkan pada siswa, bahwa elips pada gambar hanya untuk menunjukkan gambar bangun ruang jangian diartikan sebagai rusuk bola. Bangun bola hanya mempunyai sebuah sisi, sehingga tidak mempunyai rusuk.



## 1. Prisma

### a. Prisma Segiempat

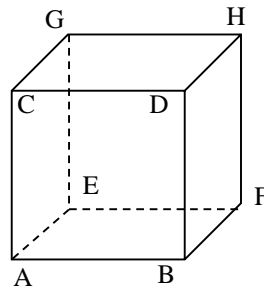
Ciri-ciri prisma segiempat

- Rusuknya berjumlah 12
- Mempunyai 8 titik sudut
- Mempunyai 6 sisi
- Alasnya berbentuk persegi panjang atau bujur sangkar

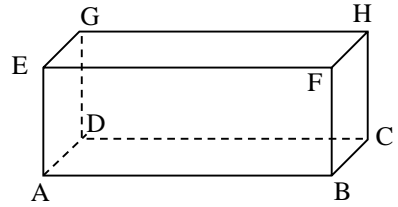
Prisma segiempat dibagi menjadi dua bagian, diantaranya :

Kubus, yaitu prisma segiempat yang besar dan bentuk sisinya sama.

$$\text{Volume} = \text{sisi} \times \text{sisi} \times \text{sisi}$$

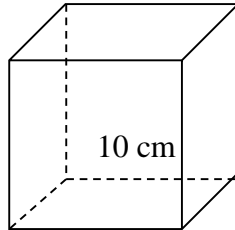


Balok, yaitu prisma segiempat yang alasnya berbentuk persegi panjang.



$$\text{Volume} = \text{luas alas} \times t$$

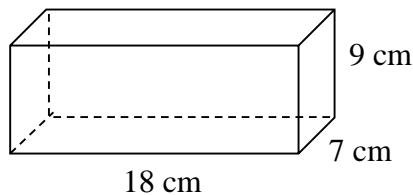
Contoh



Berapakah volume kubus disamping ?

Jawab :

$$\begin{aligned} V &= s \times s \times s \\ &= 10 \times 10 \times 10 \\ &= 1000 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



Berapa volume balok diatas jika panjangnya 18 cm, lebar 7 cm dan tinggi 9 cm ?

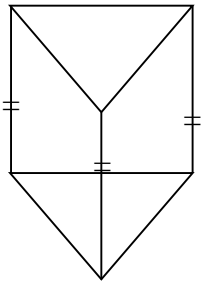
Jawab :

$$\begin{aligned} V &= \text{luas alas} \times \text{tinggi} \\ \text{Luas alas} &= p \times l \\ &= 18 \text{ cm} \times 7 \text{ cm} \\ &= 126 \text{ cm}^2 \\ V &= 126 \text{ cm}^2 \times 9 \text{ cm} \\ &= 1134 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

## b. Prisma Segitiga

Ciri-ciri prisma segitiga :

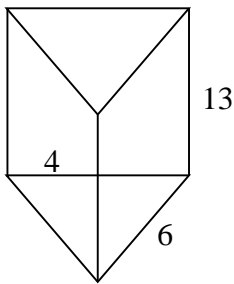
- Alas dan atapnya berbentuk segitiga
- Rusuk tegak sama panjang
- Mempunyai 5 sisi
- Titik sudutnya berjumlah 6
- Rusuknya berjumlah 9



$$\text{Volume} = L. \text{ alas} \times t$$

$$\text{Luas Alas} = \frac{1}{2} \times \text{alas} \times t$$

Contoh :



Berapakah volume prisma segitiga di samping ?

Jawab :

$$\text{Volume} = L. \text{ alas} \times t$$

$$L. \text{ alas} = \frac{1}{2} \times \text{alas} \times t$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 6$$

$$= \frac{1}{2} \times 24$$

$$= 12 \text{ cm}^2$$

$$\text{Volume} = 12 \text{ cm}^2 \times 13 \text{ cm}$$

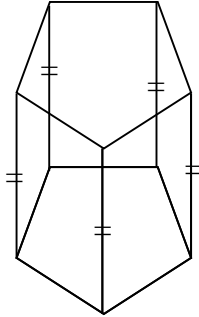
$$= 156 \text{ cm}^3$$

## c. Prisma Segilima

Ciri-ciri prisma segilima

- Alas dan atapnya berbentuk segilima
- Mempunyai sisi 7
- Rusuknya berjumlah 15
- Mempunyai 10 titik sudut

- Rusuk tegaknya sama panjang

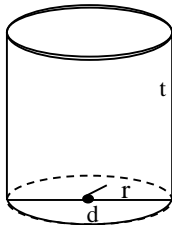


$$\text{Volume} = L. \text{ alas} \times t$$

## 2. Tabung

Ciri-ciri tabung

- Alas dan atapnya berupa lingkaran
- Mempunyai 3 bidang sisi
- Rusuknya 2



$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \pi \times r \times r \times t \\ \text{Luas selimut} &= 2 \times \pi \times r \times t \\ \text{Luas alas tabung} &= \pi r^2 \\ \text{Luas permukaan tabung} &= 2 \pi r t + 2 \pi r^2 \end{aligned}$$

Contoh :

Suatu tabung mempunyai diameter 28 cm dan tinggi 30 cm. Berapakah volume tabung serta luas selimut dan luas permukaan tabung tersebut ?

Jawab :

$$\begin{aligned} r &= 28 : 2 \\ &= 14 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \times r \times r \times t \\ &= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 30 \end{aligned}$$

$$= 22 \times 2 \times 14 \times 30$$

$$= 18.480 \text{ cm}^3$$

L. selimut

$$= 2 \pi r t$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 30$$

$$= 2 \times 22 \times 2 \times 30$$

$$= 2640 \text{ cm}^2$$

L. permukaan tabung :

$$= 2 \pi r t + 2 \pi r^2$$

$$= (2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 30) + (2 \times \frac{22}{7} \times 14^2)$$

$$= (2 \times 22 \times 2 \times 30) + (2 \times \frac{22}{7} \times 196)$$

$$= 2.640 + 1.232$$

$$= 3.872 \text{ cm}^2$$

Volume suatu tabung adalah  $1.386 \text{ cm}^3$  dengan jari-jari 7 cm. Berapakah tinggi tabung tersebut ?

Jawab :

$$V = \pi r r t \qquad t = 1.386 : 154$$

$$1.386 = \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times t \qquad = 9 \text{ cm}$$

$$= 22 \times 7 \times t$$

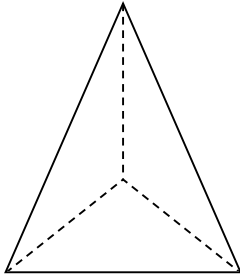
$$= 154 \times t$$

### 3. Limas

Macam-macam limas

- Limas segitiga
- Limas segiempat

### a. Limas Segitiga



Ciri-ciri limas segitiga

- Alasnya berbentuk segitiga
- Jumlah sisinya 4
- Jumlah rusuknya 6
- Mempunyai 4 titik sudut

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \text{ luas alas} \times t$$

$$\text{Luas alas} = \frac{1}{2} \text{ alas} \times t$$

$$\text{Luas} = (\text{luas alas} + 3) \times \text{luas tegak segitiga}$$

Contoh :

Luas alas suatu limas segitiga adalah  $36 \text{ cm}^2$  dengan tinggi  $9 \text{ cm}$ .

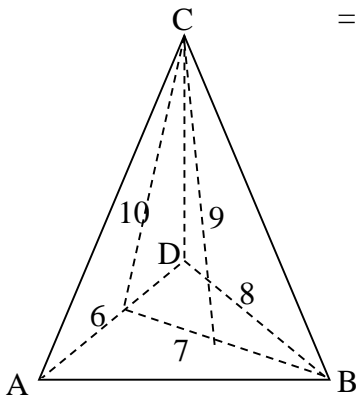
Berapakah volume limas segitiga tersebut ?

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \text{ luas alas} \times t$$

$$= \frac{1}{3} \times 36 \times 9$$

$$= 12 \times 9$$

$$= 108 \text{ cm}^3$$



Berapakah volume dan luas limas segitiga disamping ?

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \text{ luas alas} \times t$$

$$\text{Luas alas ABD} = \frac{1}{2} \text{ alas} \times t$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 7$$



$$= \frac{1}{2} \times 42 = 21 \text{ cm}^2$$

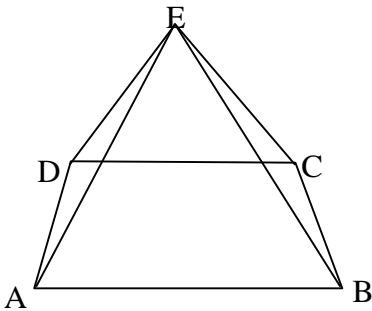
$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \frac{1}{3} \times 21 \times 9 \\ &= \frac{1}{3} \times 189 \\ &= 63 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luas limas} &= (\text{luas alas} + 3) \times \text{luas tegak segitiga} \\ &= (21 + 3) \times \text{luas tegak segitiga} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luas } \triangle BCD &= \frac{1}{2} \text{ alas} \times t \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 10 \\ &= \frac{1}{2} \times 80 \\ &= 40 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luas limas} &= (21 + 3) \times 40 \\ &= 24 \times 40 \\ &= 960 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

### b. Limas Segiempat



Ciri-ciri limas segiempat

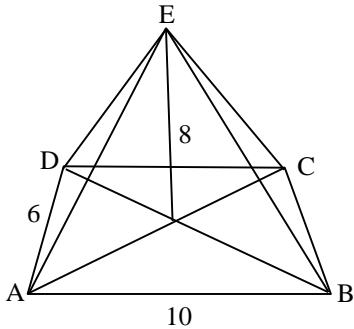
- Alasnya berbentuk segiempat
- Jumlah sisinya 5
- Jumlah rusuknya 8
- Mempunyai 5 titik sudut

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \text{ luas alas} \times t$$

$$\text{Luas alas} = p \times l$$

$$\text{Luas} = (\text{luas alas} + 4) \times \text{luas tegak segitiga}$$

Contoh :



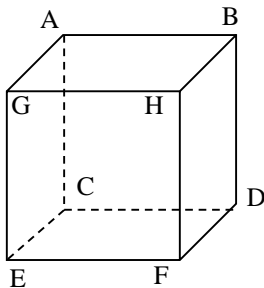
Berapakah volume limas segiempat disamping ?

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \text{ luas alas} \times t$$

$$\begin{aligned} \text{L. alas} &= p \times l \\ &= 10 \times 6 \\ &= 60 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \frac{1}{3} \times 60 \times 8 \\ &= \frac{1}{3} \times 480 \\ &= 160 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

#### 4. Kubus

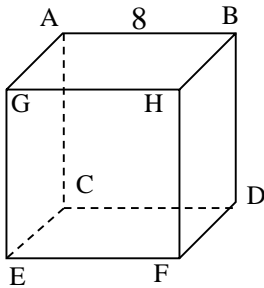


Ciri-ciri kubus :

- Semua sisi berbentuk bujur sangkar
- Seluruh sudutnya siku-siku
- Panjang rusuk sama
- Terdiri dari 12 rusuk dan 6 sisi
- Memiliki 8 titik sudut
- Mempunyai 4 diagonal ruang dan 12 diagonal bidang

Volume	$= s \times s \times s$ atau $s^3$
Luas	$= 6 \times s \times s$ atau $6s^2$
Keliling	$= 12 \times s$
Diagonal bidang	$= \sqrt{s^2 + s^2} = s\sqrt{2}$
Diagonal ruang	$= \sqrt{s^2 + s^2 + s^2} = s\sqrt{3}$

Contoh :



Berapakah volume dan keliling kubus disamping ?

Jawab :

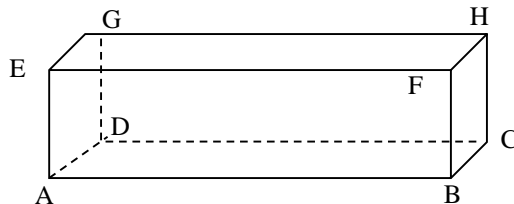
$$\begin{aligned} \text{Volume} &= s \times s \times s \\ &= 8 \times 8 \times 8 \\ &= 512 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Keliling} &= 12 \times s \\ &= 12 \times 8 = 96 \text{ cm} \end{aligned}$$

## 5. Balok

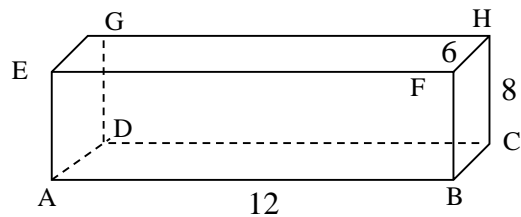
Ciri-ciri balok :

- Alasnya berbentuk segiempat
- Seluruh sudutnya siku-siku
- Terdiri dari 12 rusuk dan 6 sisi
- Memiliki 8 titik sudut
- Mempunyai 4 diagonal ruang dan 12 diagonal bidang



Volume	$= p \times l \times t$
Luas	$= 2 \times \{ (p \times l) + (p \times t) + (l \times t) \}$
Keliling	$= 4 \times (p + l + t)$
Diagonal ruang	$= \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$

Contoh :



Carilah volume, luas dan keliling balok diatas ?

Jawab :

Volume	$= p \times l \times t$
	$= 12 \times 6 \times 8$
	$= 576 \text{ cm}^3$
Luas	$= 2 \times \{ (p \times l) + (p \times t) + (l \times t) \}$
	$= 2 \times \{ (12 \times 6) + (12 \times 8) + (6 \times 8) \}$
	$= 2 \times \{ (72) + (96) + (48) \}$
	$= 2 \times 216$
	$= 432 \text{ cm}^2$
Keliling	$= 4 \times (p + l + t)$
	$= 4 \times (12 + 6 + 8)$
	$= 4 \times 26$
	$= 104 \text{ cm}$

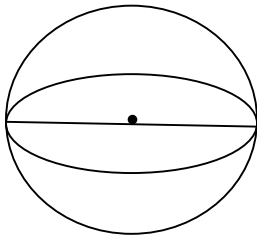
Sebuah balok mempunyai volume  $315 \text{ cm}^3$  Berapakah tinggi dan luas balok tersebut jika panjangnya  $9 \text{ cm}$  serta lebarnya  $7 \text{ cm}$  ?

$$\begin{aligned}
 V &= p \times l \times t \\
 315 &= 9 \times 7 \times t \\
 315 &= 63 \times t \\
 t &= 315 : 63 = 5 \text{ cm} \\
 \text{Luas} &= 2 \times \{ (p \times l) + (p \times t) + (l \times t) \} \\
 &= 2 \times \{ (9 \times 7) + (9 \times 5) + (7 \times 5) \} \\
 &= 2 \times \{ (63) + (45) + (35) \} \\
 &= 2 \times 143 \\
 &= 286 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

## 6. Bola

Ciri-ciri bola :

- Mempunyai 1 sisi
- Tidak mempunyai sudut dan tidak mempunyai rusuk



Volume	= $\frac{4}{3} \pi r^3$
Luas	= $4 \pi r^2$

Contoh :

Jika suatu bola mempunyai jari-jari  $14 \text{ cm}$ . Berapakah volume bola tersebut ?

$$\begin{aligned}
 \text{Volume} &= \frac{4}{3} \pi r^3 \\
 &= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 14^3 \\
 &= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 14
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4}{3} \times 22 \times 2 \times 14 \times 14 \\
 &= \frac{4 \times 22 \times 2 \times 14 \times 14}{3} \\
 &= \frac{34.496}{3} \\
 &= 11.498,66 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Suatu bola mempunyai jari-jari 7 cm. Berapakah luas dan volume tersebut ?

Jawab :

$$\begin{aligned}
 \text{Luas} &= 4 \times \frac{22}{7} \times 7^2 \\
 &= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \\
 &= 4 \times 22 \times 7 \\
 &= 616 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Volume} &= \frac{4}{3} \pi r^3 \\
 &= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7^3 \\
 &= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7 \\
 &= \frac{4}{3} \times 22 \times 7 \times 7 \\
 &= \frac{4 \times 22 \times 49}{3} \\
 &= \frac{4.312}{3}
 \end{aligned}$$

$$= 1.437,33 \text{ cm}^3$$

Sebuah bola mempunyai luas  $314,28 \text{ cm}^2$ . Berapakah jari-jari dan volume bola tersebut ?

$$\text{Luas} = 4 \times \frac{22}{7} \times r^2$$

$$314,28 = 4 \times \frac{22}{7} \times r^2$$

$$\begin{aligned} r^2 &= 314,28 : \frac{88}{7} \\ &= \frac{314,28}{1} : \frac{88}{7} \end{aligned}$$

$$= \frac{314,28}{1} \times \frac{7}{88}$$

$$= \frac{2200}{88}$$

$$r^2 = 25$$

$$r = \sqrt{25}$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

$$\text{Volume} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 5^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 5 \times 5 \times 5$$

$$= \frac{4 \times 22 \times 5 \times 5 \times 5}{3 \times 7}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{11.000}{21} \\ &= 523,809 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



## DAFTAR PUSTAKA

- **Pendidikan Matematika II**

Oleh : Cholis Sa'dijah

Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi Proyek Pendidikan Guru Sekolah dasar 1998/1999

- **Rahasia Penerapan Rumus-Rumus Matematika SD**

Oleh : Drs. Suwito

Gita Media Press, Surabaya. 2003